

**KATEDRA FIZYKI**

**WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI  
I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW  
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA**



**PRACOWNIA  
FIZYKI CZĄSTECZKOWEJ I CIEPŁA**



**ĆWICZENIE NR C-3**

**WYZNACZANIE STOSUNKU  $c_p/c_v$  DLA POWIETRZA  
METODĄ CLEMENTA I DESORMESA**

## I. Zagadnienia do przestudiowania

1. Równanie stanu gazu doskonałego.
2. Przemiany gazowe.
3. Ciepło molowe gazu, definicje  $c_p$  i  $c_v$ , zależności między  $c_p$  i  $c_v$ .
4. Wyprowadzenie wzoru na  $\kappa$ .
5. Rachunek błędów metodą Gaussa.

## II. Wprowadzenie teoretyczne

Przedmiotem badań jest powietrze, czyli mieszanina wielu gazów z dominującym azotem (około 78%) i tlenem (około 21%).

Gazy rzeczywiste, w zakresie wysokich temperatur i niskich ciśnień z bardzo dobrym przybliżeniem, mogą być traktowane jako gazy doskonałe. Spełniają równanie stanu gazu doskonałego, znane w literaturze jako równanie Clapeyrona

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (1)$$

gdzie:  $p$  - ciśnienie gazu na ściankę naczynia,  $V$  - jego objętość,  $m$  - masa,  $\mu$  - masa molowa,  $T$  - temperatura w skali Kelvina,  $R$  - uniwersalna stała gazowa.

Z prawa Clapeyrona (1) wynikają równania matematyczne opisujące podstawowe przemiany stałej masy gazu:

a) przemiana izotermiczna ( $T = \text{const}$ )

$$pV = \text{const} \quad (2)$$

b) przemiana izobaryczna ( $p = \text{const}$ )

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad (3)$$

c) przemiana izochoryczna ( $V = \text{const}$ )

$$\frac{P}{T} = \text{const} \quad (4)$$

Energia wewnętrzna danej masy gazu doskonałego, rozumiana jako suma energii kinetycznych wszystkich cząsteczek tworzących układ, jest funkcją tylko temperatury w skali bezwzględnej. Zmiany energii wewnętrznej można dokonać, doprowadzając do układu lub odprowadzając z układu ciepło (jest zmiana energii wewnętrznej na sposób ciepła) albo wykonując nad układem lub pozwalając układowi wykonać pracę (zmiana energii wewnętrznej na sposób pracy). Ilościowe zmiany energii wewnętrznej  $dU$  opisuje I zasada termodynamiki, która w formie różniczkowej przyjmuje postać

$$dU = dQ + dW \quad (5)$$

gdzie:  $dQ$  - zmiana energii wewnętrznej na sposób ciepła ( $dQ$  jest dodatnie, gdy ciepło dostarczamy, a ujemne, gdy ciepło odprowadzamy z układu),  $dW$  - zmiana energii wewnętrznej na sposób pracy ( $dW$  jest dodatnie, gdy praca jest wykonywana nad układem, a ujemna, gdy układ wykonuje pracę).

Ciepłem właściwym gazu  $c$  nazywamy wielkość fizyczną liczbowo równą ilości ciepła, jaką trzeba dostarczyć jednostce masy gazu, aby jego temperaturę podnieść o jeden stopień

$$c = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Jednostką pomiarową ciepła właściwego gazu w układzie SI jest  $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{deg}}$ .

Ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu  $c_p$  nazywamy taką ilość ciepła, jaką należy dostarczyć jednostce masy gazu, aby jego temperatura wzrosła o jeden stopień pod stałym ciśnieniem

$$c_p = \left. \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right|_{p=\text{const}} \quad (6)$$

lub w formie różniczkowej

$$c_p = \left. \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \right|_{p=\text{const}} \quad (7)$$

Ciepłem właściwym przy stałej objętości  $c_v$  nazywamy taką ilość ciepła, jaką należy dostarczyć jednostce masy gazu w stałej objętości, aby jego temperatura wzrosła o jeden stopień

$$c_v = \left. \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right|_{V=\text{const}} \quad (8)$$

lub w formie różniczkowej

$$c_v = \left. \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \right|_{V=\text{const}} \quad (9)$$

Aby znaleźć związek pomiędzy  $c_p$  i  $c_v$ , rozpatrzmy pewną porcję gazu o masie  $m$  podlegającą przemianie izobarycznej - do układu dostarczamy ciepło i wykonujemy pracę nad układem pozostającym pod stałym ciśnieniem.

Zmiana energii wewnętrznej układu dana jest wzorem

$$dU = mc_v dT \quad (10)$$

lub zgodnie z (5) i (7)

$$dU = mc_p dT + dW \quad (11)$$

Praca sił zewnętrznych w przemianie izobarycznej dana jest wyrażeniem

$$dW = -pdV \quad (12)$$

Na podstawie równania Clapeyrona (1) praca ta może być również wyrażona wzorem

$$-pdV = -\frac{m}{\mu} R dT \quad (13)$$

Po podstawieniu (10) i (13) do (11) i prostych przekształceniach uzyskujemy

$$c_p - c_v = \frac{R}{\mu} \quad (14)$$

Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu jest większe od ciepła właściwego przy stałej objętości, dlatego stosunek  $\frac{c_p}{c_v} = \kappa$  jest większy od 1 i w przypadku gazów doskonałych może być określony równaniem

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i} \quad (15)$$

gdzie  $i$  oznacza liczbę stopni swobody, tzn. liczbę niezależnych współrzędnych, które trzeba podać, aby jednoznacznie opisać położenie pojedynczej cząsteczki gazu.

Dla gazów jednoatomowych  $i = 3$ , dla dwuatomowych  $i = 5$ , a dla wieloatomowych  $i = 6$ . Teoretyczne wartości  $\kappa$  dla gazów jedno-, dwu- lub wieloatomowych wynoszą odpowiednio: 1,67; 1,40 i 1,33.

W tabeli 1 podane są rzeczywiste wartości współczynników  $\kappa$  dla różnych gazów.

TABELA 1. Współczynniki  $\kappa$  dla różnych gazów

Gaz	$\kappa$
Acetylen	1,31
Argon	1,67
Azot	1,40
Chlor	1,36
Dwutlenek węgla	1,30
Hel	1,66
Metan	1,31
Neon	1,64
Powietrze	1,40
Rtęć	1,67
Tlen	1,40
Wodór	1,41

W procesie adiabatycznym nie ma wymiany ciepła z otoczeniem ( $dQ = 0$ ), dlatego korzystając z równania Clapeyrona (1) i I zasady termodynamiki, można pokazać, że w tym przypadku

$$pV^\kappa = \text{const} \quad (16)$$

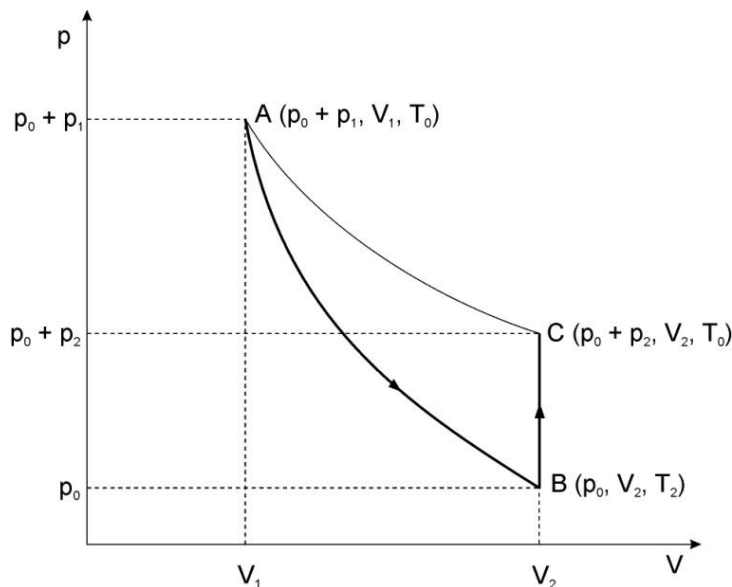
### III. Zasada pomiaru

W dużej butli o pojemności około 10 l sprężamy izotermicznie gaz w temperaturze otoczenia  $T_0$  od ciśnienia atmosferycznego  $p_0$  do ciśnienia końcowego  $p_0 + p_1$ . Stan końcowy tego sprężania oznaczony jest przez literę A na rysunku 1. Przejście ze stanu A do B jest przemianą adiabatyczną (adiabatyczne rozprężanie) i zgodnie z równaniem  $pV^\kappa = \text{const}$  może być opisane zależnością

$$(p_0 + p_1)V_1^\kappa = p_0 V_2^\kappa \quad (17)$$

Temperatura gazu maleje od temperatury otoczenia  $T_0$  do  $T_2$ , a ciśnienie od wartości  $p_0 + p_1$  do ciśnienia atmosferycznego  $p_0$ . Następnie gaz przechodzi ze stanu B do C, podlegając izochorycznemu ogrzewaniu od temperatury  $T_2$  do temperatury  $T_0$ . Stanom A i C odpowiada ta sama temperatura, dlatego ciśnienie i objętość w tych stanach spełnia równanie tej samej izotermy, czyli

$$(p_0 + p_1)V_1 = (p_0 + p_2)V_2 \quad (18)$$



Rys. 1. Zależność ciśnienia  $p$  od objętości  $V$  gazu w metodzie Clementa i Desormesa

Równanie (17) można przedstawić w postaci

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa = \frac{p_0 + p_1}{p_0} \quad (19)$$

a wzór (18) przekształcimy podobnie

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_0 + p_1}{p_0 + p_2} \quad (20)$$

Wstawiając  $\frac{V_2}{V_1}$  z równania (19) do wyrażenia (18), otrzymujemy

$$\left( \frac{p_0 + p_1}{p_0 + p_2} \right)^\kappa = \frac{p_0 + p_1}{p_0} \quad (21)$$

Po zlogarytmowaniu i przekształceniu mamy

$$\kappa = \frac{\ln \frac{p_0 + p_1}{p_0}}{\ln \frac{p_0 + p_1}{p_0 + p_2}} = \frac{\ln \left( 1 + \frac{p_1}{p_0} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{p_1}{p_0} \right) - \ln \left( 1 + \frac{p_2}{p_0} \right)} \quad (22)$$

Jeżeli ciśnienia  $p_1$  i  $p_2$  są dużo mniejsze od ciśnienia atmosferycznego  $p_0$ , to stosunki  $\frac{p_1}{p_0}$  i  $\frac{p_2}{p_0}$  są dużo mniejsze od 1. Korzystając z rozwinięcia  $\ln(1+x)$  w szereg potęgowy i zachowując tylko człony najniższych rzędów, mamy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \approx x \quad (23)$$

$$\kappa = \frac{\frac{p_1}{p_0}}{\frac{p_1}{p_0} - \frac{p_2}{p_0}} = \frac{p_1}{p_1 - p_2} \quad (24)$$

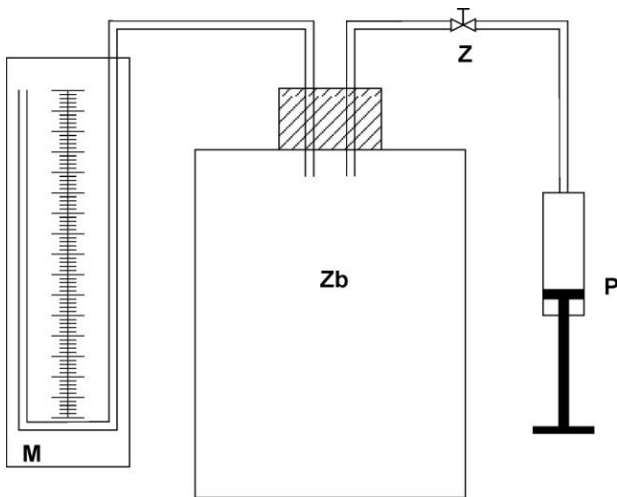
Ciśnienia  $p_1$  i  $p_2$  mierzymy manometrem wodnym, dla którego  $p = \rho gh$  ( $\rho$  - gęstość wody,  $g$  - przyspieszenie ziemskie,  $h$  - różnica poziomów wody w dwóch ramionach manometru).

Ostatecznie współczynnik  $\kappa$  obliczamy według wzoru

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad (25)$$

## IV. Zestaw pomiarowy

Butla połączona z pompką poprzez zawór, manometr cieczowy.



Rys. 2. Schemat układu do pomiaru  $\kappa$  (M - manometr wodny, Zb - zbiornik gazu, Z - zawór, P - pompka)

## V. Przebieg ćwiczenia

1. Otwieramy zawór Z. Za pomocą ręcznej pompki P sprężamy powietrze w zbiorniku.
2. Zamykamy zawór wlotowy Z, czekamy około 3 minut na ustalenie się temperatury w zbiorniku (o czym świadczy ustalenie się poziomów cieczy w obu ramionach manometru).
3. Różnica poziomów cieczy powinna być w granicach 10÷20 cm.
4. Różnicę poziomów oznaczamy jako  $h_1$ .
5. Otwieramy zawór Z, gdy ciśnienie powietrza w zbiorniku zrówna się z ciśnieniem atmosferycznym (poziomy cieczy w obu ramionach manometru są takie same), zamykamy zawór ponownie.
6. Czekamy około 3 minut do ponownego wyrównania się temperatury gazu z temperaturą otoczenia (słupki cieczy w manometrze przestanie się podnosić). Odczytujemy różnicę poziomów między słupkami cieczy w manometrze i zapisujemy jako  $h_2$ .
7. Wartości  $h_1$  i  $h_2$  zapisujemy w tabeli.
8. Pomiary powtarzamy 10 razy.

## VI. Tabela pomiarowa

Lp.	$h_1$ [cm]	$h_2$ [cm]	$\kappa$	$\kappa_{\text{śr}}$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

## VII. Opracowanie wyników

1. Obliczyć  $\kappa$  na podstawie wzoru:  $\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$  z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku.
2. Obliczyć wartość średnią  $\kappa$  z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku.

## VIII. Rachunek błędów

1. Obliczyć błąd średni kwadratowy wartości średniej metodą Gaussa.
2. Przeprowadzić dyskusję uzyskanych wyników i porównać uzyskaną wartość  $\kappa_{sr}$  z wartościami tablicowymi i wskazać na źródła ewentualnych różnic.

## Literatura

1. Lech J., Opracowanie wyników pomiarów w laboratorium podstaw fizyki, Wydawnictwo Wydziału Inżynierii Procesowej, Materiałowej i Fizyki Stosowanej PCz, Częstochowa 2005.
2. Massalski J., Massalska M., Fizyka dla inżynierów - Fizyka klasyczna, Tom I, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.
3. Respondowski R., Laboratorium z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999.
4. Szczeniowski S., Fizyka doświadczalna, cz. II, Ciepło i fizyka cząsteczkowa, PWN, Warszawa 1976.
5. Szydłowski H., Pracownia fizyczna wspomagana komputerem, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.