KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Centrum Promocji i Zastosowań Nauk Ścisłych

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt „Plan rozwoju Politechniki Częstochowskiej”
współfinansowany ze środków UNII EUROPEJSKIEJ w ramach EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO
Numer Projektu: POKL.04.01.01-00-59/08

INSTYTUT FIZYKI
WYDZIAŁINŻYNIERII PROCESOWEJ, MATERIAŁOWEJ
I FIZYKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA

LABORATORIUM Z FIZYKI

ĆWICZENIE NR W-2

WYZNACZANIE PARAMETRÓW WAHADŁA FIZYCZNEGO O ZMIENNEJ GEOMETRII

Centrum Promocji i Zastosowań Nauk Ścisłych

Politechnika Częstochowska, Centrum Promocji i Zastosowań Nauk Ścisłych
ul. Dąbrowskiego 73 pok. 178, 42-200 Częstochowa
tel./ fax. +343250324, e-mail: imi@imi.pcz.pl, http://www.cns.pcz.pl

I. Zagadnienia do przestudiowania

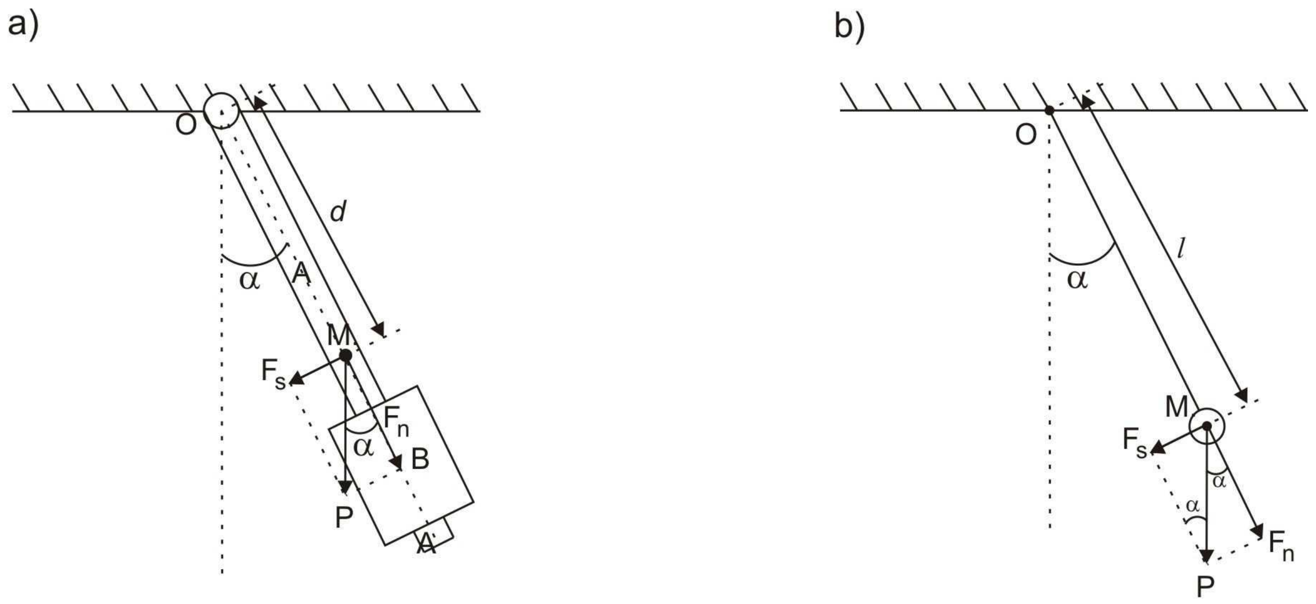
a) Siła wypadkowa i moment sił.
b) Zasady dynamiki Newtona dla ruchu postępowego i obrotowego.
c) Ruch harmoniczny prosty.
d) Wahadło fizyczne i wahadło matematyczne.
e) Moment bezwładności brył i twierdzenie Steinera.
f) Moment kierujący i długość zredukowana wahadła fizycznego.
g) Wyznaczanie środka masy i momentu bezwładności układów złożonych z brył o kształtach regularnych

II. Wprowadzenie teoretyczne

Za wahadło fizyczne można uważać bryłę sztywną dowolnego kształtu (np. jak na Rys. 1a), zawieszoną powyżej środka masy, która może wykonywać drgania okresowe wokół poziomej osi przechodzącej przez punkt zaczepienia. Wahadłem matematycznym jest abstrakcyjny układ składający się z punktowej masy zawieszonej na nierozciągliwej nici. Przybliżeniem fizycznym wahadła matematycznego jest zazwyczaj kulka o masie m, zawieszona na nici o długości l (Rys. 1b). Wahadła matematyczne i fizyczne, w najprostszym przypadku, wykonują ruch drgający pod działaniem siły ciężkości. W zakresie małych amplitud ruch ten może być przybliżony do ruchu harmonicznego prostego. Ruchem harmonicznym nazywamy taki ruch okresowy, w którym wartość siły **F,** powodującej ten ruch, jest wprost proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi, zgodnie z zależnością:

$$F = - k \cdot x \tag{1}$$

gdzie x jest wychyleniem w przypadku ruchu wzdłuż osi X układu współrzędnych o środku w punkcie równowagi, tzn. w punkcie, w którym siła **F** = 0, k jest współczynnikiem proporcjonalności zależnym od rodzaju siły powodującej drgania. Znak minus uwzględnia fakt, że siła jest zwrócona przeciwnie do kierunku wychylenia.



Rys. 1. Modele wahadła: a) fizycznego, b) matematycznego

Okres drgań wahadła fizycznego dla małych amplitud, odpowiadających przybliżeniu ruchu harmonicznego z zadowalającą dokładnością, wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathrm{mgd}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{2}$$

gdzie: I – jest momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt zaczepienia,
m – jest masą wahadła,
g – przyspieszeniem ziemskim,
d – odległością środka masy wahadła od osi obrotu.
Parametr D = *mgd* jest nazywany momentem kierującym wahadła.
Jednostką momentu kierującego wahadła jest $\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$.

Moment bezwładności punktu materialnego o masie *m*, obracającego się wokół osi oddalonej od punktu o *r* definiujemy jako;

$$\mathrm{I} = m \cdot r^2 \tag{3}$$

Jeżeli bryłę sztywną potraktować jako zbiór *n* elementów o masach m_{i}, z których każdy jest odległy od osi obrotu o r_{i}, to w pierwszym przybliżeniu można zapisać wzór na moment bezwładności bryły jako:

$$I = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m}_i \cdot \mathrm{r}_i^2 \tag{4}$$

Dokładniejsze określenie momentu bezwładności, przy zmniejszaniu elementów m_{i} do punktów i przejściu do ciągłego rozkładu masy oraz wynikającego stąd $n \to \infty$, wymaga znajomości rachunku całkowego i będzie omawiane na kursowych wykładach z fizyki, ujętych w programie studiów. Dla momentów brył o kształtach regularnych istnieją odpowiednie wzory, wyprowadzone przy użyciu rachunku całkowego. Przykładowo, moment bezwładności walca pełnego o masie *m* i promieniu podstawy *r*, względem osi obrotu pokrywającej się z osią walca, jest określony jako:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} mr^2 \tag{5}$$

Jeśli walec ten ma długość *l*, to jego moment bezwładności względem osi prostopadłej do osi walca i przechodzącej przez środek masy jest równy:

$$\mathrm{I_o} = \frac{1}{12} ml^2 \tag{6}$$

Jeżeli znamy moment bezwładności bryły o masie *m* względem osi przechodzącej przez środek masy, oznaczony jako $\mathrm{I_o}$ i chcemy wyznaczyć moment bezwładności tej bryły względem innej osi obrotu, równoległej do osi przechodzącej przez środek masy, to możemy skorzystać z twierdzenia Steinera o postaci:

$$\mathrm{I}_x = \mathrm{I_o} + mb^2, \tag{7}$$

gdzie *b* jest odległością między osiami obrotu.
Jednostką momentu bezwładności jest – $kg{\cdot}m^2$.

Przy wyznaczaniu momentu bezwładności lub momentu kierującego wahadła fizycznego pomocna jest umiejętność wyznaczania środka masy brył. Środek masy ciała to punkt, w którym przyłożone siły zewnętrzne powodują jego ruch taki jak gdyby była w nim skupiona cała masa ciała. W przypadku ruchu obrotowego występuje pojęcie środka ciężkości ciała. Jest to punkt, względem którego suma momentów sił ciężkości działających na ciało jest równa zeru. Dla ciał, dla których siłę ciężkości można uznać za niezmienną w całej objętości, położenie środka ciężkości pokrywa się ze środkiem masy. W praktyce używamy tych pojęć najczęściej zamiennie, a rozróżniać je należy przy analizie oddziaływań grawitacyjnych bardzo dużych ciał, np. w przypadku ruchu Księżyca w polu grawitacyjnym Ziemi. Jeżeli przez $\boldsymbol{r}_s$ oznaczymy wektor położenia środka masy względem początku kartezjańskiego układu współrzędnych, to dla brył składających się ze zbioru *n* mas elementarnych:

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{8}$$

gdzie: $\boldsymbol{r}_i$ jest wektorem położenia
i-tej masy elementarnej
m_i względem początku układu współrzędnych.

W przypadku pojedynczych, jednorodnych brył o kształtach regularnych, środek masy pokrywa się ze środkiem geometrycznym. Jeżeli układ składa się z n brył regularnych, to położenie środka masy takiego układu może być wyznaczone w oparciu o wzór (8) przy założeniu, że m_i oznacza masy poszczególnych brył, a $\boldsymbol{r}_i$ położenia środków ich mas względem początku układu odniesienia.
Moment bezwładności układu ciał składającego się z brył o kształtach regularnych względem osi obrotu jest równy sumie momentów bezwładności poszczególnych brył względem danej osi obrotu.
Okres drgań wahadła matematycznego, wykonującego ruch w polu grawitacyjnym, wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9}$$

Wzory (2) i (8) wyprowadza się w oparciu o rozkład siły grawitacji, przyłożonej w środku masy, na dwie wzajemnie prostopadłe składowe (Rys.1), z których jedna, $F_s = mg\sin\alpha$, powoduje ruch drgający wahadła. Wykorzystując tę siłę w drugiej zasadzie dynamiki dla ruchu obrotowego, stosując przybliżenie $\sin\alpha \cong \alpha$, zadowalające dla małych kątów α oraz równanie (1), możemy otrzymać wzory na okresy drgań wahadła fizycznego i matematycznego. Do przeprowadzenia odpowiednich działań matematycznych wymagana jest jednak znajomość podstaw rachunku różniczkowego, stąd też zagadnienie to zostało tutaj przedstawione w sposób opisowy, dla podkreślenia, że wzory te wywodzą się z podstawowych praw fizyki, do jakich należą zasady dynamiki Newtona.
Dla każdego wahadła fizycznego możemy dobrać wahadło matematyczne o takiej długości, aby ich okresy wahań były sobie równe. Długością zredukowaną wahadła fizycznego nazywamy długość jaką ma wahadło matematyczne o tym samym okresie wahań co dane wahadło fizyczne. Długość zredukowaną l_z obliczamy porównując ze sobą prawe strony równań (2) i (8), w wyniku czego otrzymamy:

$$l_z = \frac{I}{D}\cdot g = \frac{I}{md} \tag{10}$$

Celem danego ćwiczenia jest porównanie zależności okresu drgań od odległości środka masy od osi obrotu w przypadku wahadła fizycznego przedstawionego na Rys. 1a z zależnością okresu drgań od długości wahadła matematycznego.

III. Przebieg ćwiczenia

1. Zdjąć obciążnik B z wahadła fizycznego.
2. Wykonać 3 pomiary czasu 10 drgań samego pręta A.
3. Założyć obciążnik B na pręt A i zamocować w miejscu odpowiadającym odległości środka masy obciążnika od osi obrotu x = 0.05 m..
4. Wykonać 3 pomiary czasu 10 drgań.
5. Powtórzyć czynności z punktu 4 dla pozostałych odległości x podanych w Tabeli 1.
6. Wykonać po 3 pomiary czasu 10 drgań dla wahadła matematycznego o długościach z Tabeli 2.
7. Wyniki zapisać w tabelach pomiarów.

IV. Tabele pomiarów

***Tabela 1.* Wyniki dla wahadła fizycznego**

Lp.	Odległość *x* obciążnika B od osi obrotu [m]	Czas 10 drgań [s]	Średni okres drgań T [s]	Odległość *d* środka masy od osi obrotu [m]
1.	bez obciążnika	1. 2. 3.		
2.	0.05	1. 2. 3.		
3.	0.10	1. 2. 3		
4.	0.20	1. 2. 3		
5.	0.30	1. 2. 3		
6.	0.40	1. 2. 3		
7.	0.60	1. 2. 3		
8.	0.75	1. 2. 3		
9.	0.90	1. 2. 3		
10.	1.00	1. 2. 3		

***Tabela 2.** Wyniki dla wahadła matematycznego*

Lp.	Długość l wahadła [m]	Czas 10 drgań [s]	Średni okres drgań T [s]
1.	0.10	1. 2. 3.	
2.	0.20	1. 2. 3	
3.	0.30	1. 2. 3	
4.	0.40	1. 2. 3	
5.	0.60	1. 2. 3	
6.	0.70	1. 2. 3	
7.	0.75	1. 2. 3	
8.	0.80	1. 2. 3	
9.	0.90	1. 2. 3	
10.	1.00	1. 2. 3.	

V. Opracowanie wyników pomiarów

1. Do obliczeń przyjąć następujące dane: masa pręta m_p = 0.500 kg, długość pręta l_p = 1.17 m, odległość środka masy pręta od osi obrotu d = 0.52 m, masa obciążnika m_o =0.409 kg, przyspieszenie ziemskie $g = 9.81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
2. Wyliczyć teoretyczną wartość okresu drgań wahadła fizycznego bez obciążnika w oparciu o wzory (2), (6) i (7), zakładając, że pręt jest jednorodny i ma kształt walca na całej długości. Porównać okres obliczony ze zmierzonym.
3. Wyliczyć teoretyczne wartości okresu drgań wahadła matematycznego w oparciu o wzór (9) dla l = 1.00 m i l = 0.10 m i porównać je z wartościami zmierzonymi.
4. Obliczyć średnie okresy drgań dla wahadła fizycznego i matematycznego wg. Tabeli 1 i Tabeli 2.
5. Wyznaczyć położenia d środka masy w oparciu o wzór (8) dla odległości x obciążnika od osi obrotu podanych w Tabeli 1.
6. Sporządzić na jednym układzie współrzędnych wykresy $T = f(x)$, $T = f(d)$ dla wahadła fizycznego i $T = f(l)$ dla wahadła matematycznego.
7. Z przecięcia wykresów $T = f(x)$ i $T = f(l)$ wyznaczyć wartość $x = l_z$ odpowiadającą długości wahadła matematycznego o okresie T_z równym okresowi wahadła fizycznego.
8. Z wykresu $T = f(d)$ dla wahadła fizycznego odczytać wartość d_z odpowiadającą okresowi T_z.oraz wartość d_m, dla którego okres drgań T_m osiąga wartość minimalną.

9. W oparciu o wzór (10) obliczyć moment bezwładności I_z, charakterystyczny dla długości zredukowanej danego wahadła fizycznego o geometrii odpowiadającej zależności $x = l_z$ oraz moment I_m odpowiadający minimalnej wartości okresu drgań T_m, z przekształcenia wzoru (2).

VI. Rachunek błędów

1. Obliczyć błędy pomiaru okresu drgań ΔT dla każdego z położeń obciążnika wahadła fizycznego i dla każdej z długości wahadła matematycznego poprzez wyliczenie średniej wartości $T_{śr}$ z 3 pomiarów i przyjęcie za ΔT maksymalną odchyłkę pojedynczego pomiaru od wartości średniej:

$$\Delta T = \sup_{i=1,2,3} |T_i - T_{śr}|$$

2. Nanieść błędy na wykresy $T = f(x)$, $T = f(l)$ i $T = f(d)$ przyjmując $\Delta x = \Delta l = \Delta d = \pm 10^{-3}$ m.
3. Obliczyć błąd bezwzględny momentu bezwładności ΔI_z w oparciu o wzór:

$$\Delta I_z = |\, d_z \cdot l_z| \Delta m + |\, m \cdot l_z| \Delta d_z + |\, m \cdot d_z| \Delta l_z$$

gdzie $\Delta m = \pm 10^{-3}$ kg, $\Delta d_z = \Delta l_z = \pm 10^{-3}$ m.

4. Obliczyć błąd bezwzględny momentu bezwładności ΔI_m w oparciu o wzór:

$$\Delta I_m = \frac{1}{4\pi^2} \left(|2T_m \cdot mgd_m| \Delta T + |\, T_m^2\, g\, d_m| \Delta m + |\, T_m^2\, mg| \Delta d_m \right)$$

gdzie $\Delta d_m = \pm 10^{-3}$ m, ΔT jest średnią z wartości wyliczonych w punkcie 1 dla wahadła fizycznego.

a. Obliczyć błędy względne

$$\delta_z = \frac{\Delta I_z}{I_z} \cdot 100\% \quad \text{i} \quad \delta_m = \frac{\Delta I_m}{I_m} \cdot 100\%$$

VII. Dyskusja błędów i wyników

1. Przedyskutować możliwe przyczyny różnic pomiędzy teoretycznymi i doświadczalnymi wartościami okresów drgań.
2. Przedyskutować przebieg zależności $T = f(d)$ dla wahadła fizycznego i $T = f(l)$ dla wahadła matematycznego.

VIII. Literatura

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker; *Podstawy fizyki*, t.2, PWN Warszawa
2. Sz. Szczeniowski; *Fizyka doswiadczalna*, cz. 1, PWN Warszawa
3. C. Kittel, W.D. Knight, M.A.Ruderman; *Mechanika*, PWN Warszawa