KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Centrum Promocji i Zastosowań Nauk Ścisłych

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt „Plan rozwoju Politechniki Częstochowskiej”
współfinansowany ze środków UNII EUROPEJSKIEJ w ramach EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO
Numer Projektu: POKL.04.01.01-00-59/08

INSTYTUT FIZYKI
WYDZIAŁ INŻYNIERII PROCESOWEJ, MATERIAŁOWEJ
I FIZYKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA

LABORATORIUM Z FIZYKI

ĆWICZENIE NR W-4

WYZNACZANIE GĘSTOŚCI CIECZY ZA POMOCĄ WAGI MOHRA-WESTPHALA

Centrum Promocji i Zastosowań Nauk Ścisłych

Politechnika Częstochowska, Centrum Promocji i Zastosowań Nauk Ścisłych
ul. Dąbrowskiego 73 pok. 178, 42-200 Częstochowa
tel./ fax. +343250324, e-mail: imi@imi.pcz.pl, http://www.cns.pcz.pl

I. Zagadnienia do przestudiowania

1. Pojęcie gęstości bezwzględnej i względnej. Jednostki gęstości.
2. Zasada działania wagi Mohra-Westphala
3. Prawo Archimedesa.
4. Wyznaczanie gęstości ciał stałych i cieczy metodą Archimedesa.

II. Wprowadzenie teoretyczne

Gęstością bezwzględną ρ (czytaj: *rho*) ciała nazywamy stosunek masy tego ciała m do objętości V:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \left[\frac{kg}{m^3}\right] \tag{1}$$

Innymi słowy gęstość to masa jednostki objętości ciała. Gęstość jest wielkością, która jest używana do charakterystyki różnych substancji. Jeżeli masę ciała mierzymy w kilogramach (kg) a objętość w metrach sześciennych (m^3) to jednostką gęstości bezwzględnej jest $\frac{kg}{m^3}$.

Gęstością względną ρ_{wzgl} nazywamy stosunek gęstości danego ciała ρ_x do gęstości innego ciała ρ_w przyjętego za ciało wzorcowe:

$$\rho_{wzgl} = \frac{\rho_x}{\rho_w} = \frac{\frac{m_x}{V_x}}{\frac{m_w}{V_w}} = \frac{m_x}{V_x} \cdot \frac{V_w}{m_w} \tag{2}$$

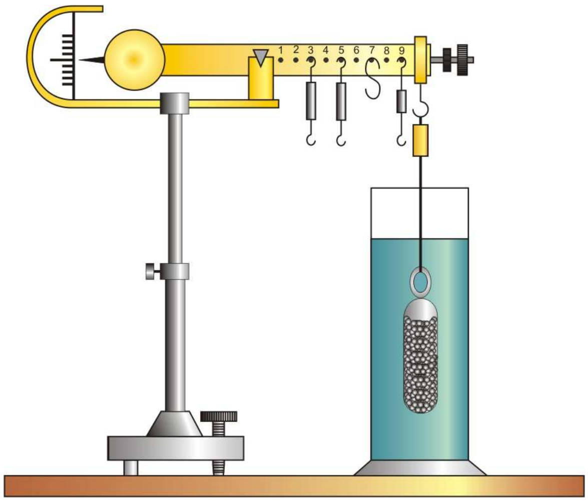
Jeśli objętość badanego ciała V_x jest równa objętości ciała wzorcowego V_w to gęstość względną możemy przedstawić jako stosunek mas tych ciał:

$$\rho_{wzgl} = \frac{m_x}{m_w} \tag{3}$$

Jak wynika z definicji, gęstość względna jest wielkością niemianowaną.

Ponieważ objętość ciała zależy od temperatury i ciśnienia, w związku z tym również gęstość ciała zależy od tych wielkości fizycznych. Dla większości substancji objętość rośnie wraz z temperaturą, co oznacza zmniejszanie się gęstości. Anomalne zachowanie wykazuje woda, która w zakresie temperatur od 0° do 4°C zmniejsza swoją objętość, czyli zwiększa gęstość. Powyżej temperatury 4°C objętość wody, jak dla większości substancji, rośnie wraz z temperaturą. Ponieważ wzrost ciśnienia powoduje zmniejszanie się objętości, gęstość substancji rośnie ze wzrostem ciśnienia.

Zasada działania wagi Mohra-Westphala - Waga Mohra-Westphala to rodzaj wagi belkowej pozwalającej na pomiar gęstości cieczy (rys. 1). Na jednym z ramion wagi wieszamy szklany nurek, który umieszczamy w cieczy. Równowaga wagi zostaje osiągnięta przez zawieszenie obciążników, zwanych konikami, na kołkach umieszczonych na belce wagi. O tym, czy belka jest w równowadze, decyduje wielkość zwana momentem siły.



Rys.1. Waga Mohra-Westphala

Moment siły – w ruchu obrotowym jest odpowiednikiem siły w ruchu postępowym ciała.

Wektor momentu siły definiuje się jako iloczyn wektorowy ramienia siły $\vec{r}$ (czyli wektora łączącego punkt przyłożenia siły z osią obrotu) oraz wektora siły działającej na ciało $\vec{F}$ (rys.2):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{4}$$

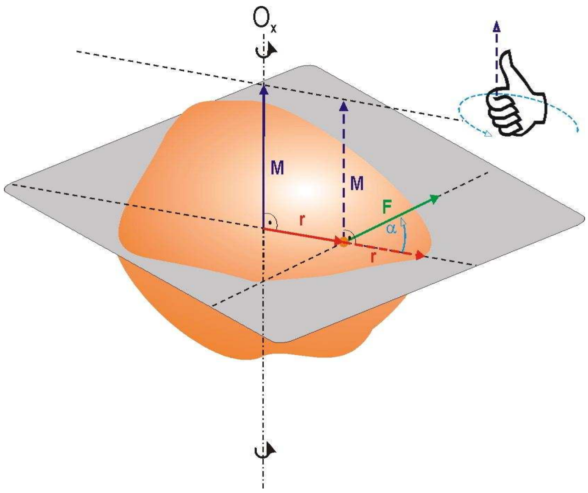
Wartość wektora momentu siły obliczamy z wzoru:

$$M = rF \sin\alpha \tag{5}$$

Gdzie α – jest kątem pomiędzy wektorem siły $\vec{F}$ i wektorem $\vec{r}$. Jeśli kąt α między wektorem siły i ramienia siły wynosi 90^0, wówczas $\sin\alpha = 1$ i wartość momentu siły wynosi:

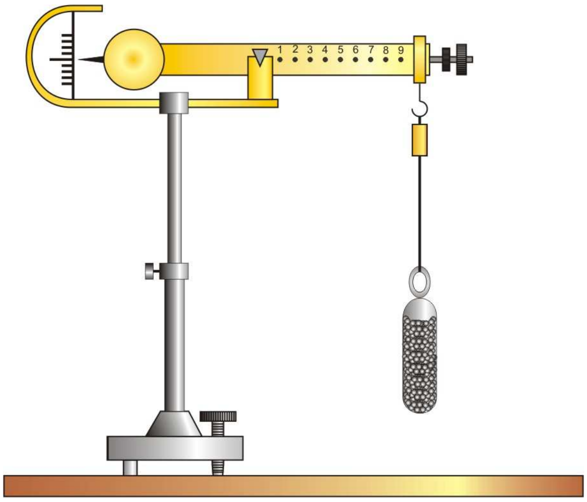
$$M = r \cdot F \tag{6}$$

Jednostką momentu siły w układzie SI jest $N{\cdot}m$.



Rys.2. Kierunek i zwrot wektora momentu siły $\overrightarrow{M}$

Jeśli na jakieś ciało działa kilka równoważących się sił, ciało takie nie koniecznie będzie w stanie równowagi. Choć jako całość nie będzie doznawało przyspieszenia, to jednak przyłożone siły mogą powodować ruch obrotowy. Gdy siły równoważą się, ciało będące w spoczynku pozostaje w równowadze (nie obraca się) wtedy, gdy całkowity moment sił działających wynosi zero. A zatem belka wagi będzie w równowadze, gdy momenty wszystkich działających na nią sił, wzajemnie się zniosą. Gdy szklany nurek wagi Mohra wisi swobodnie w powietrzu (rys. 3), wówczas belka wagi jest w równowadze.



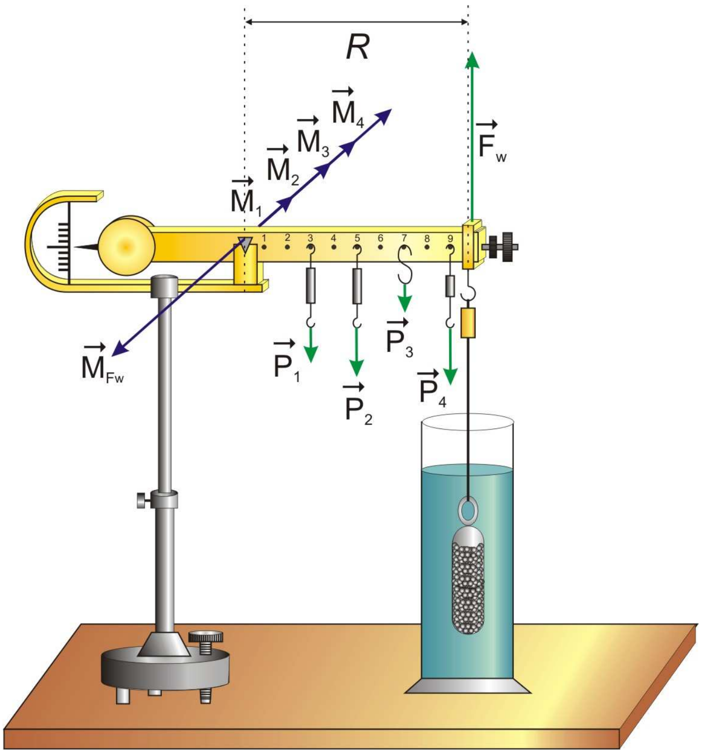
Rys. 3. Gdy szklany nurek wisi w powietrzu, waga Mohra-Westphala jest w równowadze.

Jeśli szklany nurek zostanie zanurzony w cieczy, zadziała na niego siła wyporu $\overrightarrow{F_w}$, co sprawi, że również na koniec belki zadziała siła równa $\overrightarrow{F_w}$. Siła ta spowoduje powstanie momentu siły $\overrightarrow{M_{F_w}}$ działającego na belkę wagi zaburzając jej równowagę. (rys. 4.). Aby przywrócić równowagę wagi należy powiesić na odpowiednich kołkach koniki, które swoim ciężarem spowodują powstanie przeciwnego momentu siły $\overrightarrow{M_k}$, który zrównoważy moment siły $\overrightarrow{M_{F_w}}$.Warunek równowagi wagi przedstawia się wtedy jako:

$$M_{F_w} = M_k \tag{7}$$

Jeśli zawieszone zostaną np. cztery koniki, to całkowity moment sił ciężkości koników jest równy sumie momentów sił pochodzących od każdego z koników:

$$M_k = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \tag{8}$$



Rys. 4: Równowaga wagi zachodzi, gdy całkowity moment sił koników $\overrightarrow{M_k} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{M_3} + \overrightarrow{M_4}$ ***równoważy moment siły*** $\overrightarrow{M_{F_w}}$

Prawo Archimedesa pozwala nam określić wartość siły wyporu $\overrightarrow{F_w}$.

Prawo Archimedesa: Na ciało całkowicie lub częściowo zanurzone w cieczy działa ze strony tej cieczy siła wyporu $\vec{F}_w$, skierowana pionowo w górę, której wartość jest równa ciężarowi cieczy wypartej przez to ciało:

$$F_w = m_c g \tag{9}$$

gdzie:

m_c – to masa wypartej cieczy, g – przyspieszenie ziemskie.

Korzystając z definicji gęstości oraz faktu, że objętość wypartej cieczy V_c jest równa objętości zanurzonego ciała lub jego zanurzonej części V_z można uzyskać wzór na wartość siły wyporu:

$$F_w = \rho_c V_c g = \rho_c V_z g \tag{10}$$

gdzie:

ρ_c – gęstość cieczy, w której zanurzono ciało,

V_c – objętość wypartej cieczy,

V_z – objętość zanurzonego ciała, lub jego zanurzonej części.

Gdy belka wagi jest w pozycji poziomej moment siły $\vec{F}_w$ działającej na krawędzi belki wynosi (wzór 4)

$$M_{F_w} = R \cdot F_w \tag{11}$$

bowiem kąt α pomiędzy siłą $\vec{F}_w$ i jej ramieniem wynosi 90^0. W powyższym wzorze R oznacza długość ramienia wagi Mohra-Westphala, czyli odległość, w jakiej zawieszony jest szklany nurek licząc od osi obrotu O. Biorąc pod uwagę wzór (10), mamy:

$$M_{F_w} = R \cdot \rho \cdot g \cdot V \tag{12}$$

Rozważmy z kolei moment sił ciężkości wywierany przez zawieszone koniki. Ciężary koników P pozostają w stosunku $10:1:\frac{1}{10}:\frac{1}{100}$.Na podstawie definicji momentu siły (wzór 6), całkowity moment sił ciężkości koników wynosi:

$$M_k = P_1 \cdot r_1 + P_2 \cdot r_2 + P_3 \cdot r_3 + P_4 \cdot r_4 \tag{13}$$

gdzie r_1, r_2, r_3 i r_4 to odległości od osi obrotu O, w jakich powieszono koniki, czyli są to ramiona sił ciężkości, odpowiednio P_1, P_2, P_3 i P_4. Kąt α pomiędzy ramieniem każdej z sił ciężkości i siłą $\vec{F}_w$ wynosi 90^o. Aby obliczyć wartość masy zawieszonych ciężarków, należy skorzystać z faktu, że w stanie równowagi istnieje równość momentów siły wyporu $\vec{F}_w$ i ciężaru koników P. Dla uproszczenia zagadnienia wprowadzimy pojęcie tak zwanej masy zastępczej konika $\boldsymbol{m_z}$. Jest to masa takiego konika zawieszonego na nacięciu 10, którego ciężar daje moment równy momentowi konika zawieszonego na podziałce ***n(1,......,9)***. Z równości momentów otrzymano:

$$m_z = 0{,}1 \cdot n \cdot m \tag{14}$$

gdzie ***m***- masa konika.

Przykład obliczenia masy wszystkich zawieszonych na belce wagi koników:

Zrównoważono wypór hydrostatyczny zawieszając koniki:

Masa koników m	*Nacięcie na podziałce wagi n*	*Masa zastępcza danej cieczy m_z $m_z=0{,}1 \cdot n \cdot m$*
10g	$n_1=9$	$m_{z1}=0{,}1 \cdot 9 \cdot 10=9g$
10g	$n_2=2$	$m_{z2}=0{,}1 \cdot 2 \cdot 10=2g$
1g	$n_3=4$	$m_{z3}=0{,}1 \cdot 4 \cdot 1=0{,}4g$
0,1g	$n_4=3$	$m_{z4}=0{,}1 \cdot 3 \cdot 0{,}1=0{,}03g$
0,01g	$n_5=5$	$m_{z5}=0{,}1 \cdot 5 \cdot 0{,}01=0{,}005g$

Razem: $\boldsymbol{m_c=11{,}435g}$

Uwzględniając masę całkowitą $\boldsymbol{m_c}$ koników na podstawie równania (13) moment siły koników wynosi:

$$M_k = P \cdot R \tag{15}$$

gdzie $P = m_c \cdot g$

W sytuacji równowagi belki równość momentów sił określa wzór $M_{F_w} = M_k$ i przyjmuje postać:

$$\rho \cdot g \cdot V \cdot L = R m_c g \tag{16}$$

Ostatnie równanie można zastosować w sytuacji, gdy nurek zanurzony jest w wodzie (cieczy wzorcowej o znanej gęstości ρ_w) oraz ponownie, gdy pływak zanurzony jest w cieczy o nieznanej gęstości ρ_x:

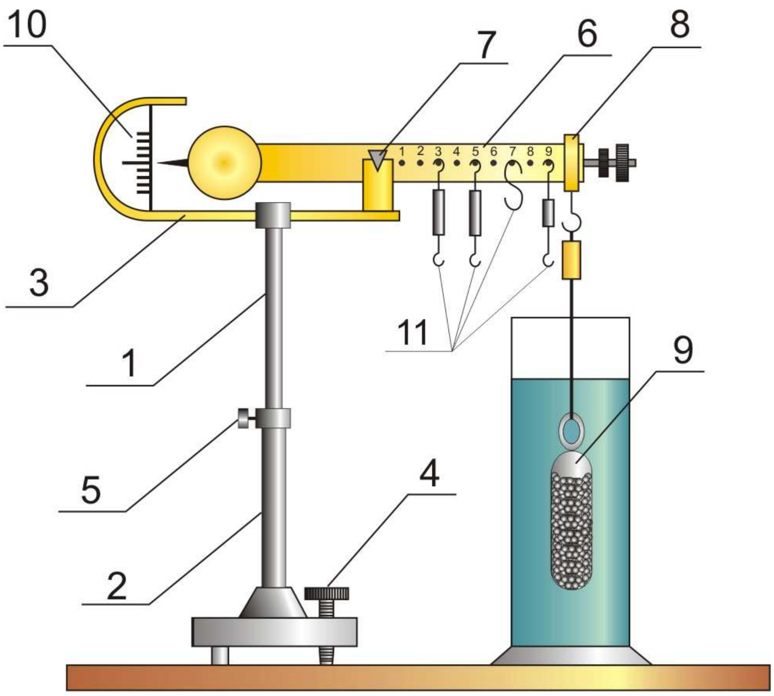
$$\rho_w \cdot g \cdot V \cdot L = R m_{cw} g \tag{17}$$

$$\rho_x \cdot g \cdot V \cdot L = R m_{cx} g \tag{18}$$

Dzieląc stronami ostatnie równania otrzymujemy po przekształceniach:

$$\rho_x = \frac{m_{cx}}{m_{cw}} \cdot \rho_w \tag{19}$$

III. Zestaw pomiarowy



1. pręt regulacyjny dźwigni
2. kolumna
3. ramiączko pręta regulacyjnego
4. śruba
5. śruba dociskowa
6. belka wagi
7. nóż oporowy
8. haczyk strzemiączka
9. szklany nurek
10. skala
11. koniki

Waga Mohra-Westphala to aparat umożliwiający wykonywanie pomiarów gęstości cieczy za pomocą prawa Archimedesa. Mierzoną wielkością jest siła wyporu cieczy. Waga Mohra-Westphala to waga dwuramienna. Jedna z belek podzielona jest na 10 działek o równej długości a. Na działce nr 10 znajdującej się na końcu ramienia zawieszony jest szklany nurek. Wagę ustawia się w pozycji równowagi za pomocą śruby 4 umieszczonej przy podstawie wagi. W zagłębieniach przy podziałce umieszcza się specjalnie przygotowane ciężarki, o masach w stosunku 10:1:0,1:0,01, tzn., jeśli najcięższy ciężarek ma masę 10 g, to pozostałe ważą 1 g, 0,1 g i 0,01g.

W skład wyposażenia wagi wchodzą:

- Szklany nurek z drutem zawieszeniowym
- Termometr o zakresie pomiarowym od 0°C do 40°C z działką elementarną 0,5°C
- Odważniki do zawieszania: 3 odważniki o masie 10g, 1 odważnik o masie 0,1g, 1 odważnik o masie 1g, 1 odważnik o masie 0,01g
- Pęseta do odważników
- Menzurka szklana o pojemności 250ml

IV. Przebieg ćwiczenia

1. Zrównoważyć wagę Mohra-Westphala w powietrzu. W tym celu należy zawiesić szklany nurek na prawym ramieniu wagi i obracać śrubę regulacyjną umieszczoną w podstawie do momentu, gdy wskazówka pokryje się ze środkową kreską skali. Śruba 4 oraz belka wagi powinny się znajdować na jednej płaszczyźnie. Podczas pomiarów nie zmieniamy ustawienia wagi.
2. Napełnić menzurkę wodą destylowaną.
3. Luzując śrubę dociskową unieść pręt regulacyjny wspornika, a następnie szklany nurek wraz z połową drutu, na którym jest zawieszony, zanurzyć do wody.
4. Usunąć pęcherze z powierzchni szklanego nurka.
5. Zmierzyć temperaturę wody.
6. Wyznaczyć masę m_{cw} zawieszając kolejno koniki (począwszy od 10g aż do 0,01g oraz rozpoczynając zawieszenie od końca belki) doprowadzając wskazówkę wagi do równowagi (pokrycia się z kreską środkową skali).
7. Wyjąć i osuszyć szklany nurek, a następnie zanurzyć go do innej badanej cieczy.
8. Sporządzić wodny roztwór ***NaCl*** o stężeniu $C_{1x}=10\ g/100\ cm^3$ (odważyć 15 g soli i uzupełnić wodą do 150 cm^3). Zanurzyć szklany nurek całkowicie w roztworze. Przywrócić równowagę wieszając odpowiednie koniki. W celu wyznaczenia masy m_{cx1}, powtórzyć czynności jak w punktach 3 – 7. Odczytać pozycje koników i wyniki zapisać w tabeli.
9. Rozcieńczyć poprzedni roztwór do stężenia $C_{2x}= 5g/100cm^3$ i wykonać pomiary jak dla poprzedniej cieczy, wyznaczając masę m_{cx2}.

Aby otrzymać roztwór o stężeniu C_{2x}:

W 150g dziesięcioprocentowego roztworu znajduje się $150 \cdot 0{,}1=15$g substancji. Taka sama masa substancji musi znajdować się również w roztworze po rozcieńczeniu. A zatem jeśli chcemy uzyskać roztwór 5% to oznacza to, że w 100 cm^3 roztworu musi zawierać się 5g substancji:

100cm^3 roztworu zawiera 5 g substancji

stąd x cm^3 roztworu zawiera 15 g substancji

$$x = \frac{15 \cdot 100}{5} = 300\ cm^3$$

A zatem objętość roztworu 5% jaką uzyskamy po rozcieńczeniu roztworu 10% wynosi 300 cm^3.

Objętość wody jaką należy dolać do roztworu 10% wynika z różnicy mas obu roztworów:

300 cm^3 – 150 cm^3 = 150cm^3

10. Po każdym pomiarze szklany nurek i termometr należy przetrzeć alkoholem i dokładnie osuszyć.

V. Tabela pomiarowa

Rodzaj cieczy	***Temp [°K]***	***Masa Konika [kg]***	***Numer nacięcia n***	***Masa zastępcza [kg] m_z***	***Masa całkowita [kg] m_c***	***Gęstość bezwzględna [kg/m^3]***	***Gęstość względna***
Woda destylowana							
roztwór C_{1x}							
roztwór C_{2x}							

VI. Opracowanie ćwiczenia

1. Na podstawie wyników pomiarów obliczyć gęstość bezwzględną badanych cieczy korzystając ze wzoru 19: $\rho_x = \frac{m_{cx}}{m_{cw}} \rho_w$,

gdzie: m_{cx} – masa całkowita koników równoważących szklanego nurka w badanej cieczy,

m_{cw} – masa całkowita koników równoważących szklanego nurka w wodzie destylowanej

2. Następnie obliczyć gęstość względną badanych cieczy ze wzoru

$$\rho_{xwzgl} = \frac{m_{cx}}{m_{cw}} \tag{20}$$

VII. Rachunek błędu

1. Błąd pomiaru gęstości jest związany z niepewnością oceny nadwagi czy też niedowagi. Błędem jest wiec obarczony zarówno pomiar masy wody jak i badanej cieczy. Jeżeli najmniejszy konik ma masę m_0, można przyjąć, że

$$\left|\Delta m_{cx}\right| = \left|\Delta m_{cw}\right| = 0{,}1 m_0 \tag{21}$$

2. Korzystając z powyższego założenia obliczyć błąd $\Delta\rho_x$ metodą różniczki zupełnej ze wzoru

$$\rho_x = \frac{m_{cx}}{m_{cw}}\rho_w \tag{22}$$

$$\left|\Delta\rho_x\right| = \left|\frac{\partial\rho_x}{\partial m_{cx}}\right|\cdot\left|\Delta m_{cx}\right| + \left|\frac{\partial\rho_x}{\partial m_{cw}}\right|\cdot\left|\Delta m_{cw}\right| \tag{23}$$

po zróżniczkowaniu otrzymujemy, zatem

$$\left|\Delta\rho_x\right| = \left|\frac{\rho_w}{m_{cw}}\right|\cdot\left|\Delta m_{cx}\right| + \left|-\frac{m_{cx}\rho_w}{m_{cw}^2}\right|\cdot\left|\Delta m_{cw}\right| \tag{24}$$

$$\left|\Delta\rho_x\right| = \frac{\rho_w}{m_{cw}}\cdot\left|\Delta m_{cx}\right| + \frac{m_{cx}\rho_w}{m_{cw}^2}\cdot\left|\Delta m_{cw}\right| \tag{25}$$

oraz oszacować względne błędy procentowe

$$\left|\frac{\Delta\rho_x}{\rho_x}\right|\cdot 100\ \% \tag{26}$$

3. Przeprowadzić dyskusję uzyskanych wyników.

VIII. Literatura

1. *T. Dryński* - Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki
2. *R.Resnick, D.Halliday* – Fizyka, t.1 PWN Warszawa
3. *J. Orear* - Fizyka, tom I
4. *Sz. Szczeniowski* - Fizyka doświadczalna, cz. 1
5. *R. Fulińska* – Opisy i instrukcje do ćwiczeń laboratoryjnych z fizyki, PWN Warszawa.

IX. Dodatek: Gęstość wody w różnych temperaturach.

Temp. [K]	*Gęstość 10^3[kg/m^3]*	*Temp. [K]*	*Gęstość 10^3[kg/m^3]*	*Temp. [K]*	*Gęstość 10^3[kg/m^3]*	*Temp. [K]*	*Gęstość 10^3[kg/m^3]*
273	0,999840	282	0,999781	291	0,998595	300	0,996514
274	0,999899	283	0,999700	292	0,998405	301	0,996234
275	0,999940	284	0,999605	293	0,998204	302	0,995945
276	0,999864	285	0,999497	294	0,998993	303	0,995648
277	0,999720	286	0,999376	295	0,997771	313	0,992200
278	0,999964	287	0,999243	296	0,997539	323	0,988100
279	0,999940	288	0,999098	297	0,997298	333	0,983200
280	0,999801	289	0,998942	298	0,997046	353	0,971800
281	0,999848	290	0,998774	299	0,996785	373	0,958400