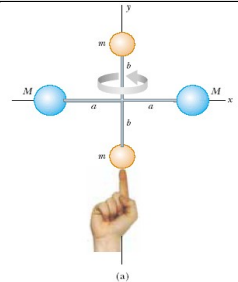


***KATEDRA FIZYKI***

***WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI  
I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW  
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA***



***PRACOWNIA  
MECHANIKI***



## **ĆWICZENIE NR M-2**

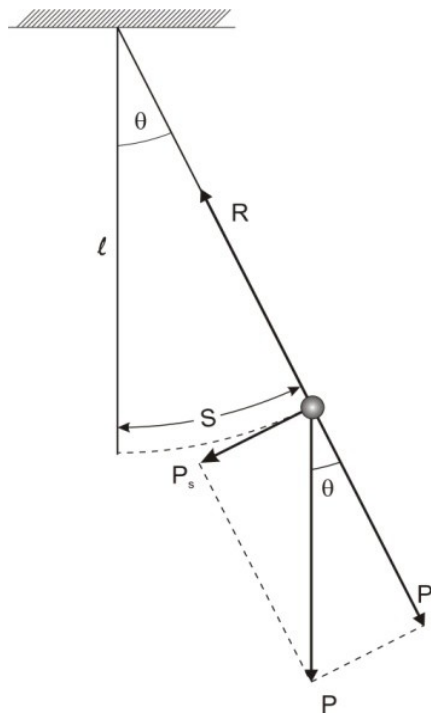
***ZALEŻNOŚĆ OKRESU DRGAŃ WAHADŁA  
OD AMPLITUDY***

## I. Zagadnienia do przestudiowania

1. Ruch harmoniczny prosty.
2. Ruch harmoniczny tłumiony.
3. Wahadło matematyczne.
4. Zależność okresu drgań wahadła matematycznego od amplitudy.

## II. Wprowadzenie teoretyczne

Ruchem harmonicznym nazywamy ruch, w którym wychylenie drgającego punktu materialnego jest sinusoidalną (lub cosinusoidalną) funkcją czasu. W ruchu takim siła działająca na punkt materialny jest wprost proporcjonalna do wychylenia i zawsze skierowana do położenia równowagi (tzw. siła zwrotna). Przykładem ruchu harmonicznego prostego są drgania wahadła matematycznego. Wahadło matematyczne jest to wyidealizowane ciało o masie punktowej zawieszone na cienkiej, nierozciągliwej nici. Kiedy ciało wytrącimy z położenia równowagi, zaczyna się ono wahać w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości.



Rys. 1. Rozkład sił działających na wahadło matematyczne

Na rysunku 1 przedstawiono wahadło o długości  $l$  i masie  $m$  odchylone od pionu o kąt  $\theta$ . Na rozpatrywany punkt materialny działają następujące siły: pionowa siła ciężkości  $P = mg$  oraz siła reakcji nici  $R$ . Siłę ciężkości  $P$  rozkładamy na dwie składowe:

- składową radialną  $P_r$ , o wartości  $P_r = mg \cos \theta$ ,
- składową styczną  $P_s$ , o wartości  $P_s = -mg \sin \theta$ .

Składowa styczna jest siłą przywracającą równowagę układu - sprowadza masę  $m$  do położenia równowagi. Należy podkreślić, że wartość siły  $P_s$  nie jest proporcjonalna do przemieszczenia kąowego  $\theta$ , lecz do  $\sin\theta$ . Zatem ruch ten nie jest prostym ruchem harmonicznym

$$P_s = -mg \sin \theta \quad (1)$$

Korzystając z II zasady dynamiki Newtona, ruch masy możemy opisać równaniami:

$$ma = -mg \sin \theta \quad (2)$$

Podstawiając:

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad s = l \theta$$

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu dla wahadła w postaci

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (3)$$

Założmy, że wahadło wykonuje małe ruchy wokół położenia równowagi. W tym przypadku - dla małych kątów wychylenia można przyjąć w przybliżeniu, że  $\sin\theta \approx \theta$ . Tak więc ściśle równania różniczkowe (3) zastępujemy równaniem przybliżonym

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (4)$$

W tym przybliżeniu siła zwrotna wynosi  $P_s = -mg\theta$ , co jest właśnie wymaganym kryterium dla prostego ruchu harmonicznego. Rozwiązanie tego równania ma postać

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (5)$$

gdzie:  $\alpha$  - faza początkowa ruchu,  $\theta_0$  - amplituda drgań (największe wychylenie kulki od położenia równowagi) i  $\omega$  - prędkość kątowna. Z powyższego wynika, że ruch wahadła dla małych kątów wychylenia ma charakter drgań harmonicznym.

Prędkość kątowna jest określona wzorem  $\omega = 2\pi/T$ , gdzie  $T$  jest okresem drgań, czyli czasem, w ciągu którego zachodzi pełne jedno drganie.

Ponieważ w równaniu (4)  $\omega^2 = g/l$ , a więc

$$\frac{g}{l} = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2$$

Okres drgań dany jest wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Okres tych drgań nie zależy od amplitudy, a więc są to drgania izochroniczne.

Dla dużych kątów wychylenia przybliżenie  $\sin\theta \approx \theta$  nie jest słuszne, a równanie (3) opisujące drgania wahadła jest nieliniowe. Rozwiązaniem jego jest zależność opisująca ruch okresowy, lecz już ruch nieharmoniczny. Okres tego ruchu zależy od amplitudy. Zależność tę można przedstawić w postaci szeregu

$$T_\theta = T_0\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{15}{48}\right)^2 \sin^6 \frac{\theta}{2} + \dots\right] \quad (6)$$

Przez rozwinięcie funkcji sinus w szereg potęgowy wzór ten można przekształcić do postaci wygodniejszej do obliczeń

$$T_\theta = T_0\left[1 + \frac{1}{16}\theta^2 + \frac{11}{3072}\theta^4 + \dots\right] \quad (7)$$

W ćwiczeniu sprawdza się doświadczalnie zależność (7).

W podanym opisie drgań nie uwzględniono zjawiska tłumienia. Drgania harmoniczne proste stanowią przypadek drgań idealnych. W warunkach rzeczywistych, w dowolnym ośrodku materialnym drgania są zawsze związane z przekazywaniem energii otoczeniu - przy pokonywaniu sił oporu. Strata energii przez ciało drgające powoduje tłumienie, w wyniku czego zmniejsza się amplituda drgań. Prędkość kątowa drgań tłumionych  $\omega$  jest nieco mniejsza od prędkości kątowej drgań nietłumionych  $\omega_0$  i wynosi

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (8)$$

gdzie  $\beta$  jest współczynnikiem tłumienia.

Wartość współczynnika tłumienia  $\beta$  można obliczyć z szybkości zaniku amplitudy jako

$$\beta = \frac{\ln \frac{\theta_1}{\theta_2}}{t_2 - t_1} \quad (9)$$

gdzie  $\theta_1$  i  $\theta_2$  są amplitudami drgań, zmierzonymi w chwilach  $t_1$  i  $t_2$ .

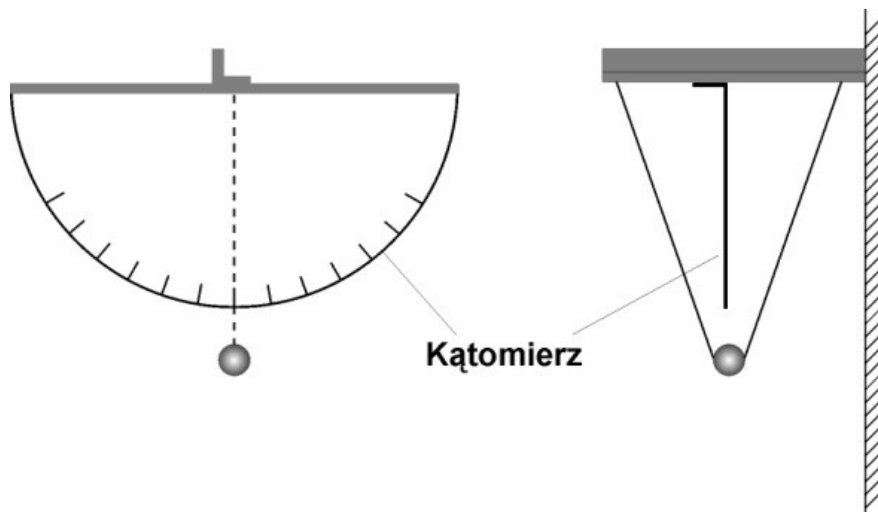
### III. Zasada pomiaru

Celem doświadczenia jest wyznaczenie zależności okresu drgań od amplitudy dla układu zbliżonego do wahadła matematycznego oraz porównanie jej z zależnością teoretyczną.

W ćwiczeniu wykorzystujemy wahadło podobne do wahadła matematycznego. Kulka zawieszona jest na dwóch niciach, co ułatwia wprowadzenie wahadła w ruch drgający w jednej płaszczyźnie (rys. 2). W płaszczyźnie drgań umieszczony jest kątomierz, na którym odczytuje się kąt wychylenia - amplitudę drgań. Okres drgań mierzy się stoperem.

## IV. Zestaw pomiarowy

Wahadło podobne do wahadła matematycznego, kątomierz, elektroniczny miernik czasowy, linijka.



Rys. 2. Widok ogólny wahadła

## V. Przebieg ćwiczenia

1. Wprowadzić w ruch wahadło w ten sposób, aby drgania odbywały się w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny kątomierza.
2. Odczytać amplitudę początkową  $\theta_1$  na kątomierzu, jednocześnie włączyć licznik  $t_1 = 0$ . Aby uniknąć błędów paralaksy, odczyt kąta wykonać dla pozycji oka, w której obie linki pokrywają się.
3. Zmierzyć czas trwania 50 okresów. W chwili zatrzymania licznika odczytać czas  $t_2$  i jednocześnie amplitudę końcową  $\theta_2$ . Pomiar powtórzyć trzykrotnie. Obliczyć średnią wartość okresu. Wyniki wpisać do tabeli 1.
4. Pomiar okresu drgań (czynności z pkt. 1-3) przeprowadzić dla wartości amplitudy początkowej  $\theta_1$  równych:  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ , ...,  $60^\circ$ .
5. Wyznaczyć okres wahadła  $T_{0d}$  przy najmniejszej amplitudzie drgań, która nie powinna przekraczać  $3^\circ$ . Zwiększenie dokładności uzyskujemy przez pięciokrotne powtórzenie pomiaru czasu 50 drgań. Obliczyć średnią wartość okresu  $T_0$ . Wyniki pomiarów wpisać do tabeli 2.
6. Zmierzyć długość wahadła  $l$ .

## VI. Tabele pomiarowe

TABELA 1. Wyznaczenie okresu wahadła  $T_d$  od amplitudy  $\theta$

$\theta_1$ [deg] [rad]	$\theta_2$ [deg]	$\theta_{2sr}$ [deg] [rad]	$\bar{\theta} = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_{2sr})$ [rad]	t [s]	T = t/n [s]	$T_{sr}$ [s]	$\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)_d$	$\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)_t$
10° .....		..... .....						
20° .....		..... .....						
30° .....		..... .....						
40° .....		..... .....						
50° .....		..... .....						
60° .....		..... .....						

TABELA 2. Wyznaczenie okresu wahadła  $T_{0d}$

$\theta_1$ [deg]	t [s]	$T_{0d}$ [s]	$T_{0d sr}$ [s]
< 3°			

Długość wahadła  $l = \dots\dots\dots$  m.

## VII. Opracowanie wyników

1. Wykorzystując zmierzona długość wahadła, obliczyć teoretyczny okres drgań wahadła ze wzoru

$$T_{0t} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

i porównać z wartością zmierzona dla małych kątów.

2. Korzystając ze wzoru

$$T_t = T_{0t} \left[ 1 + \frac{1}{16} (\bar{\theta})^2 + \frac{11}{3072} (\bar{\theta})^4 + \dots \right]$$

obliczyć względną zmianę okresu wahadła wynikającą z teorii:

$$\left( \frac{\Delta T}{T_{0t}} \right)_t = \frac{T - T_{0t}}{T_{0t}} = \frac{T_{0t} + T_{0t} \frac{1}{16} (\bar{\theta})^2 + T_{0t} \frac{11}{3072} (\bar{\theta})^4 - T_{0t}}{T_{0t}} = \frac{T_{0t} \left( \frac{1}{16} (\bar{\theta})^2 + \frac{11}{3072} (\bar{\theta})^4 \right)}{T_{0t}}$$

$$\left( \frac{\Delta T}{T_{0t}} \right)_t = \frac{1}{16} (\bar{\theta})^2 + \frac{11}{3072} (\bar{\theta})^4$$

oraz wyznaczoną doświadczalnie

$$\left( \frac{\Delta T}{T_{0d}} \right)_d = \frac{T_d - T_{0d}}{T_{0d}}$$

3. Narysować wykresy:

- a. Teoretycznej zależności względnej zmiany okresu wahadła od średniej amplitudy drgań  $\bar{\theta}$

$$\left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)_t = f(\bar{\theta})$$

- b. Doświadczalnej zależności względnej zmiany okresu wahadła od średniej amplitudy drgań  $\bar{\theta}$

$$\left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)_d = f(\bar{\theta})$$

Średnia amplituda drgań wynosi  $\bar{\theta} = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_{2sr})$ .  $\bar{\theta}$  wyrazić w radianach ( $1^\circ = 0,0174$  rad).

4. Dla amplitudy  $\theta_1 = 60^\circ$  obliczyć współczynnik tłumienia  $\beta$ , a następnie okres drgań tłumionych, korzystając ze wzorów:

$$\beta = \frac{\ln \frac{\theta_1}{\theta_2}}{t_2 - t_1}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

5. Czy zjawisko tłumienia ma w naszym doświadczeniu zauważalny wpływ na okres drgań?

## VIII. Rachunek błędu

Błąd pomiaru okresu  $T$  i amplitudy  $\bar{\theta}$  oszacować z dokładności wyznaczenia okresu  $T$  i amplitudy  $\theta$ . Błędy pomiarowe nanieść na wykres doświadczalnej zależności okresu drgań od średniej amplitudy.

## Literatura

1. Halliday D., Resnick R., Walker J., Fizyka, t. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
2. Kittel C., Knight M.A., Ruderman W.D., Mechanika, PWN, Warszawa 1975.
3. Konopka M., Zięba A. i inni, Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, cz. I, Wydawnictwo AGH, Kraków 1986.
4. Lech J., Opracowanie wyników pomiarów w laboratorium podstaw fizyki, Wydawnictwo Wydziału Inżynierii Procesowej, Materiałowej i Fizyki Stosowanej PCz, Częstochowa 2005.
5. Leyko L., Mechanika ogólna, t. II, Dynamika, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
6. Respondowski R., Laboratorium z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999.
7. Szczeniowski S., Fizyka doświadczalna, cz. 1, Mechanika i akustyka, PWN, Warszawa 1980.
8. Szydłowski H., Pracownia fizyczna wspomagana komputerem, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.