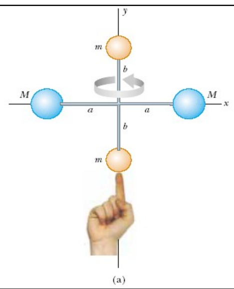
KATEDRA FIZYKI

WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI
I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA

PRACOWNIA MECHANIKI



ĆWICZENIE NR M-3

WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA REWERSYJNEGO

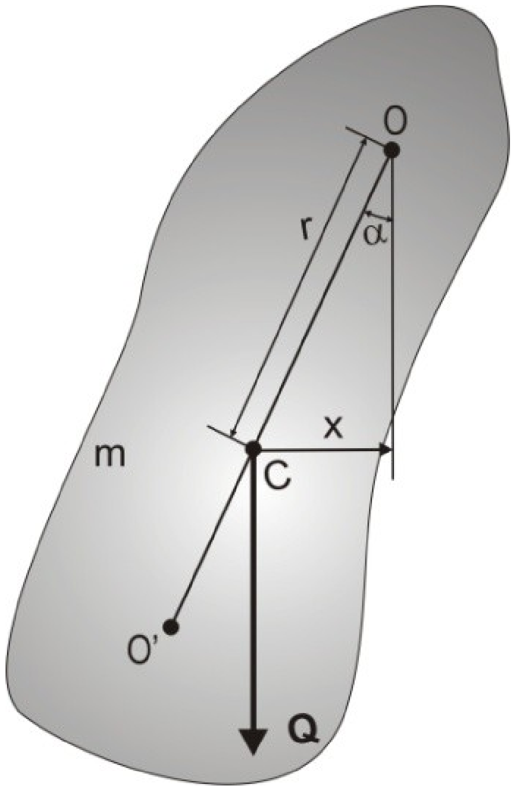
I. Zagadnienia do przestudiowania

1. Ruch harmoniczny prosty.
2. Wyprowadzić wzór na okres drgań wahadła fizycznego.

3. Metody wyznaczania momentu bezwładności bryły oraz jej środka masy.
4. Długość zredukowana wahadła fizycznego (wahadło zsynchronizowane).
5. Zapoznać się z metodą pomiaru przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła:
   - matematycznego prostego i różnicowego,
   - fizycznego (rewersyjnego).
7. Rachunek błędu metodą różniczki zupełnej.

II. Wprowadzenie teoretyczne

Wahadło fizyczne jest to bryła sztywna, mogąca obracać się dookoła poziomej osi, przechodzącej ponad środkiem ciężkości bryły (np. wahadłem fizycznym są dziecięca huśtawka czy też wahadło zegara ściennego) - rysunek 1.



Rys. 1. Model wahadla fizycznego

Wyprowadzenie wzoru na okres wahań wahadła fizycznego. Rozpatrzmy wahadło fizyczne w postaci nieregularnej bryły sztywnej o masie *m* i środku ciężkości w punkcie C o poziomej osi obrotu w punkcie O. Gdy wahadło odchylimy o mały (5÷7°) kąt α od linii pionowej przechodzącej przez punkt zawieszenia O, wówczas na bryłę działa przywracający równowagę moment $\boldsymbol{M}$ siły $\boldsymbol{Q}$ względem punktu O o wartości

$$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{Q}x = -mgr\sin\alpha \tag{1}$$

gdzie r oznacza odległość od środka ciężkości do osi obrotu. Znak „–” odzwierciedla przywracalny charakter momentu siły $\boldsymbol{M}$; dla $\alpha > 0$ wartość momentu jest ujem- na, a dla $\alpha < 0$ wartość momentu jest dodatnia.

Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona dla bryły sztywnej

$$M = I\varepsilon \tag{2}$$

gdzie I jest momentem bezwładności względem osi obrotu O, a ε - przyśpieszeniem kątowym

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \tag{3}$$

Dla małych kątów odchylenia α wyrażonych w mierze łukowej (α < 0,1221730) możemy w przybliżeniu założyć

$$\sin\alpha \approx \alpha \tag{4}$$

Na podstawie równań (1)-(4) możemy zapisać:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgr\sin\alpha \tag{5}$$

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgr\alpha \tag{6}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgr}{I}\alpha \tag{7}$$

Równanie to ma dokładnie postać analogiczną do równania ruchu harmonicznego prostego

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{8}$$

przy czym ω^2 zastępuje czynnik $\frac{mgr}{I}$, a kąt α - zastępuje x.

Rozwiązaniem szczególnym równania (7) jest

$$\alpha = A\sin\left(\omega t + \varphi\right) \tag{9}$$

które jest analogiczne do równania $x(t) = A\sin\left(\omega t + \varphi\right)$, opisującego ruch harmoniczny prosty. Oznacza to, że ruch wahadła fizycznego też jest ruchem harmonicznym prostym o częstości kołowej $\omega = \sqrt{\frac{mgr}{I}}$ i okresie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}} \tag{10}$$

Iloczyn mgr często oznaczamy symbolem *D* i nazywamy momentem kierującym wahadła. Wówczas wyrażenie na okres *T* przyjmuje postać

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{10a}$$

W wahadle matematycznym (mała kulka zawieszona na nieważkiej i nierozciągliwej nici) o długości *l*, odległość $r = l$, a moment bezwładności

$$I = ml^2 \tag{11}$$

co w konsekwencji prowadzi do wzoru na okres *T* w postaci

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{12}$$

Porównując wzory (10) i (11), możemy określić tzw. długość zredukowaną *l* wahadła fizycznego

$$l = \frac{I}{mr} \tag{13}$$

Jeżeli na przedłużeniu linii OC (rys.1) odłożymy odcinek OO' = l, otrzymamy punkt O', zwany środkiem wahań wahadła fizycznego. Środek wahań O' posiada interesującą własność wzajemności względem punktu O. Mianowicie gdyby osią obrotu był punkt O', to środkiem wahań będzie punkt O, a okresy wahań względem równoległych osi O i O' są jednakowe.

Wykażmy teraz, że okres wahań wahadła, gdy osią obrotu będzie punkt O', będzie taki sam jak w przypadku osi obrotu O.

Wykorzystamy tu twierdzenie Steinera o momencie bezwładności

$$I = I_c + mr^2 \tag{14}$$

gdzie I_c to moment bezwładności wahadła względem osi przechodzącej przez środek ciężkości, *r* - odległość osi obrotu od środka ciężkości,

Z równań (13) i (14) otrzymujemy

$$l = \frac{I_c + mr^2}{mr} = \frac{I_c}{mr} + r \tag{15}$$

Wybierając jako nową oś wahań, przechodzącą przez środek O', znajdujemy nowy okres wahań

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{mg(l-r)}} \tag{16}$$

gdzie: *I′* - moment bezwładności wahadła względem nowej osi O′, *(l–r)* - odległość nowej osi od środka ciężkości C wahadła.

I ′ obliczamy z twierdzenia Steinera (14)

$$I' = I_c + m(l-r)^2 \tag{17}$$

Dla nowej osi O’ znajdziemy długość zredukowaną *l*’

$$l' = \frac{I'}{m(l-r)} \tag{18}$$

uwzględniając (17), otrzymujemy

$$l' = \frac{I_c + m(l-r)^2}{m(l-r)} = \frac{I_c}{m(l-r)} + (l-r) \tag{19}$$

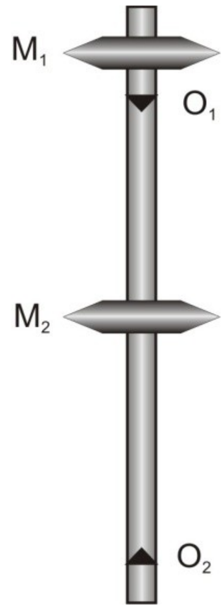
Z przekształconego wzoru (15) wynika, że

$$r = \frac{I_c}{m(l-r)} \tag{20}$$

Podstawienie (20) do (19) wykazuje, że

$$l' = r + l - r = l$$

Oznacza to, że okresy drgań względem O i O’ są równe, ponieważ długości zredukowane są takie same. Na tej zasadzie (równości okresów) oparta jest metoda pomiarowa przyspieszenia ziemskiego *g*, polegająca na zastosowaniu tzw. „wahadła rewersyjnego”, czyli odwracalnego. Wahadło składa się z pręta, na którym osadzone są dwie stałe osie, w postaci pryzmatów $\mathrm{O} \equiv \mathrm{O}_1$ i $\mathrm{O}' \equiv \mathrm{O}_2$ zwróconych ostrzami ku sobie (rys. 2).



Rys. 2. Schemat wahadła rewersyjnego

W wahadle O_1 i O_2 znajdują się w stałej pozycji, natomiast można zmieniać położenie środka ciężkości przez przesunięcie dwóch mas M_1 i M_2. Praktycznie przesuwa się tylko masę M_2, położoną między ostrzami.

Przy odpowiednio dobranym położeniu obu mas okresy wahań dookoła osi O i O' są jednakowe. Wówczas odległość O_1O_2 ostrzy obu pryzmatów jest długością zredukowaną l, a okres drgań wyraża się wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{21}$$

z którego obliczamy przyspieszenie ziemskie g

$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2} \tag{22}$$

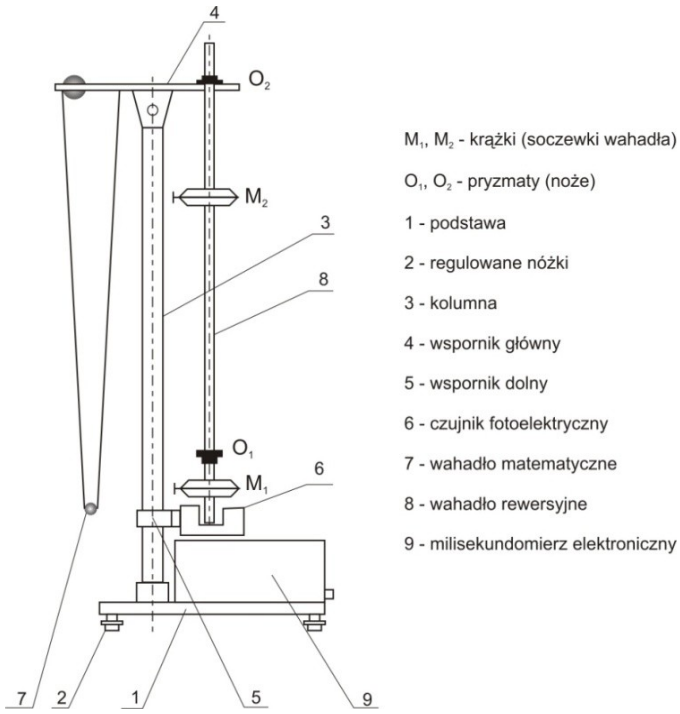
W praktyce masę (krążek, soczewkę) M_1 zamocowujemy na początku eksperymentu między pryzmatem O_1 oraz końcem pręta i zamocowanie to zachowujemy jako niezmienione w trakcie pomiarów. Zmieniamy natomiast położenie (zamocowanie) masy (krążka, soczewki) M_2 na odcinku O_1O_2. Dla każdego położenia masy M_2 rozumianego jako odległość d od jednego z pryzmatów (noży), np. O_1 - mierzymy okres wahań T_1 wahadła zawieszonego na pryzmacie (nożu) O_1 oraz okres T_2 wahadła zawieszonego na pryzmacie (nożu) O_2. Następnie rysujemy wykresy wartości T_1 i T_2 w zależności od d. Punkty przecięć krzywych $T_1(d)$ oraz $T_2(d)$ odpowiadają położeniom masy M_2, dla których zawieszenia (noże) O_1 i O_2 stanowią środki wahań wahadła. Wówczas odległość między ostrzami $O_1O_2 = l$ stanowi długość zredukowaną wahadła. Jednocześnie wartości okresów dla punktów przecięć T_{1p} i T_{2p} winny się okazać równe: $T_{1p} = T_{2p} = T_p$, co w konsekwencji uzasadnia oblicze-nie wartości g z wzoru (22)

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Należy jednak podkreślić, że w praktyce wartości T_{1p} i T_{2p} odczytane z wykresów mogą się okazać nieco różne. Wówczas w obliczeniach g za T_p należy przyjąć średnią wartość arytmetyczną T_{1p} i T_{2p}, to znaczy $T_p = \frac{1}{2}\left(T_{1p} + T_{2p}\right)$.

III. Zestaw pomiarowy

Statyw wahadła rewersyjnego (3) z elektronicznym miernikiem okresów (10), wahadło rewersyjne (8).



Rys. 3. Układ pomiarowy wahadła rewersyjnego

IV. Przebieg ćwiczenia

1. Noże wahadła zamocować w jednakowej odległości (około 8÷10 cm) od końców pręta (8) w taki sposób, aby były zwrócone ku sobie ostrzami. Jeden z krążków (M_1) umieścić wcześniej pomiędzy nożami, drugi zaś (M_2) w pobliżu końca prę- ta w odległości około 3÷5 cm liczonej od końca pręta.
2. Sprawdzić, czy krawędzie ostrzy noży pokrywają się z nacięciami na pręcie (śruby mocujące krążki i noże przykręcać z uwagą tak, aby nie zerwać gwintu śruby).

3. Zamocować wahadło na panewce wspornika górnego (4).
4. Wspornik dolny (5) wraz z czujnikiem fotoelektrycznym (6) przesunąć tak, aby pręt wahadła przecinał oś optyczną.
5. Krążek (M_2) położony między nożami przesunąć tak, aby początkowa odległość między soczewkami była największa.
6. Zmierzyć okres wahań wahadła T_1 względem osi (noża) O_1 . W tym celu należy:
   a) wychylić wahadło o 4÷5º od położenia równowagi i puścić,
   b) nacisnąć klawisz ZEROWANIA (СБРОС),
   c) po naliczeniu przez miernik 9 okresów nacisnąć klawisz STOP (СТОП), układ zmierzy i wyświetli czas t_1 dla n = 10 drgań,
   d) wyznaczyć okres wahadła rewersyjnego $T_1 = t_1/n$.
7. Zdjąć wahadło i zamocować je na drugim nożu, wspornik dolny z czujnikiem fotoelektrycznym przesunąć tak, aby wahadło przecinało oś optyczną.
8. Zmierzyć okres wahań wahadła T_2 względem osi O_2 w sposób opisany w pkt. 6 dla okresu T_1 .
9. Nie zmieniając położenia noży i krążka zewnętrznego, zmieniać położenie drugiego krążka (wewnętrznego) co 1 cm (odległość między dwoma sąsiednimi nacięciami pręta), wyznaczając okresy wahań T_1 i T_2 dla kolejnych położeń.
10. Sporządzić (na zajęciach) prowizoryczny wykres zależności okresów T_1 i T_2 od położenia d przesuwanego krążka M_2. Sprawdzić, czy krzywe zależności T_1 i T_2 przecinają się.
11. Zmierzyć (dokładnie) długość zredukowaną wahadła l, tj. odległość między nożami O_1O_2 .

V. Tabela pomiarowa

<table>
<tr><td colspan="7">Położenie nieruchomego krążka M_1 (względem bliższego końca pręta) .... cm</td></tr>
<tr><td colspan="7">Położenie noża O_1 (względem tego samego końca pręta) .... cm</td></tr>
<tr><td colspan="7">Położenie noża O_2 .... cm</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Położenie krążka M_2 względem noża O_1
d
[cm]</td><td colspan="6">Czas trwania n okresów</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dla zawieszenia na nożu O_1</td><td colspan="3">Dla zawieszenia na nożu O_2</td></tr>
<tr><td>Ilość okresów n</td><td>Czas
t_1
[s]</td><td>Okres
$T_1 = t_1/n$
[s]</td><td>Ilość okresów n</td><td>Czas
t_2
[s]</td><td>Okres
$T_2 = t_2/n$
[s]</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

$l = O_1O_2 =$ ………… m

VI. Opracowanie ćwiczenia

1. Sporządzić wykres zależności okresów drgań T_1 i T_2 od położenia d krążka M_2.
2. Odczytać z wykresu współrzędne punktu przecięcia T_{1p} i T_{2p}.
3. Obliczyć przyspieszenie ziemskie g z wykorzystaniem wzoru (22). Jeżeli T_{1p} i T_{2p} nieco się różnią, przyjąć, że $T_p = \frac{1}{2}\left(T_{1p} + T_{2p}\right)$.

VII. Rachunek błędu

1. Obliczyć bezwzględny błąd $|\Delta g|$, stosując metodę różniczki zupełnej.

   Wartość $|\Delta T_p|$ oszacować z wykorzystaniem relacji: $|\Delta T_p| = |\Delta T_p|_m + |\Delta T_p|_w + |\Delta T_p|_r$,

   gdzie:

   $|\Delta T_p|_m = \left|\frac{\Delta t}{n}\right|$; przy czym $|\Delta t|$ - wartość jednostki ostatniej cyfry odczytu czasu t na skali przyrządu;

   $|\Delta T_p|_w$ - dokładność odczytu wartości T_{1p} i T_{2p} w skali wykresu (= 1 mm w skali tego wykresu);

   $|\Delta T_p|_r = \frac{1}{2}\left(T_{1p} - T_{2p}\right)$ - niepewność wyznaczenia T_p z różniących się wartości T_{1p} i T_{2p}.
2. Zaokrąglić wartości $|\Delta g|$ oraz g zgodnie z zasadami zaokrągleń.
3. Obliczyć błąd względny.
4. Dokonać próby oceny precyzji metody pomiarowej stosowanej w ćwiczeniu oraz uzyskanego wyniku.

Literatura

1. Dryński T., Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, PWN, Warszawa 1980.
2. Lech J., Opracowanie wyników pomiarów w laboratorium podstaw fizyki, Wydawnictwo Wydziału Inżynierii Procesowej, Materiałowej i Fizyki Stosowanej PCz, Częstochowa 2005.
3. Massalski J., Massalska M., Fizyka dla inżynierów, Fizyka klasyczna, Tom I, WNT, Warszawa 2005.
4. Szydłowski H., Pracownia fizyczna wspomagana komputerem, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.