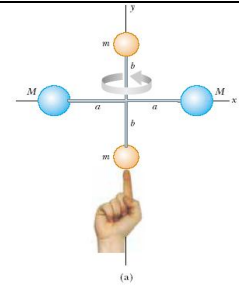


KATEDRA FIZYKI

**WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI
I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA**



**PRACOWNIA
MECHANIKI**



ĆWICZENIE NR M-4

WYZNACZANIE

MOMENTU BEZWŁADNOŚCI BRYŁ

ZA POMOCĄ DRGAŃ SKRĘTNYCH

I. Zagadnienia do przestudiowania

1. Ruch harmoniczny prosty.
2. Drgania torsyjne bryły sztywnej.
3. Moment bezwładności punktu i bryły sztywnej.
4. Tensor momentu bezwładności bryły sztywnej.

II. Wprowadzenie teoretyczne

Ruch obrotowy bryły sztywnej opisuje II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego w postaci

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (1)$$

Moment pędu bryły danego punktu bryły \vec{L}_i w układzie związanym ze środkiem masy określa zależność

$$\vec{L}_i \equiv \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (2)$$

Natomiast moment siły \vec{M}_i ma postać

$$\vec{M}_i \equiv \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (3)$$

Prędkość i -tego punktu względem początku układu $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$.

Stąd wyrażenie na moment pędu całego ciała

$$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \quad (4)$$

Skorzystamy z tożsamości wektorowej

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Podstawiając, otrzymujemy

$$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^n m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] \quad (5)$$

Wszystkie punkty mają tę samą prędkość kątową $\vec{\omega}$, możemy więc zapisać powyższe równanie wektorowe jako układ trzech równań dla poszczególnych składowych $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned}
 L_x &\equiv \omega_x \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 - \sum_{i=1}^n m_i x_i (\vec{r}_i \vec{\omega}) \\
 L_y &\equiv \omega_y \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 - \sum_{i=1}^n m_i y_i (\vec{r}_i \vec{\omega}) \\
 L_z &\equiv \omega_z \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 - \sum_{i=1}^n m_i z_i (\vec{r}_i \vec{\omega})
 \end{aligned} \tag{6}$$

Ponieważ

$$\vec{r}_i \vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

otrzymujemy dla składowej x -owej momentu pędu wyrażenie

$$L_x = \omega_x \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \tag{7}$$

Dla pozostałych składowych:

$$\begin{aligned}
 L_y &= -\omega_x \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i + \omega_y \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \\
 L_z &= -\omega_x \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i - \omega_y \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i + \omega_z \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 - z_i^2)
 \end{aligned} \tag{8}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 - x_i^2) \\
 I_{xy} &= -\sum_{i=1}^n m_i x_i^2 y_i^2 \\
 I_{xz} &= -\sum_{i=1}^n m_i x_i^2 z_i^2
 \end{aligned} \tag{9}$$

i analogicznie dla pozostałych sum otrzymamy układ równań:

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 - x_i^2) \\
 I_{xy} &= -\sum_{i=1}^n m_i x_i^2 y_i^2 \\
 I_{xz} &= -\sum_{i=1}^n m_i x_i^2 z_i^2
 \end{aligned} \tag{10}$$

Ostatecznie równanie, wiążące wektor momentu pędu \mathbf{L} z wektorem prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$, w zapisie macierzowym przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

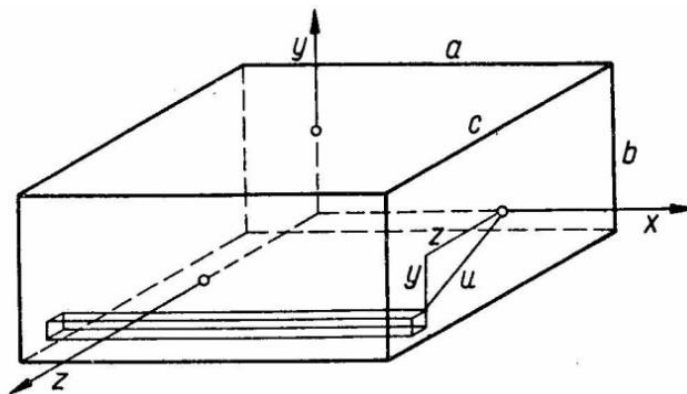
Macierz z prawej strony równania to *tensor bezwładności drugiego rzędu*, a jego elementy nazywamy współczynnikami bezwładności lub *momentami bezwładności*.

W praktyce w przypadku brył mamy do czynienia z ciągłym rozkładem masy ($n \rightarrow \infty$) i sumowanie w powyższych wyrażeniach zastępujemy całkowaniem objętościowym. Wtedy dla przykładu elementy pierwszego wiersza macierzy: tensora bezwładności obliczamy jako:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V \rho(\vec{r})(r^2 - x^2) dV = \int_V \rho(\vec{r})(y^2 + z^2) dV \\ I_{xy} &= \int_V \rho(\vec{r})xy dV \\ I_{xz} &= \int_V \rho(\vec{r})xz dV \end{aligned} \quad (12)$$

Analogiczne wzory możemy otrzymać dla pozostałych składowych tensora.

Można wykazać, że suma współczynników bezwładności leżących na głównej przekątnej (tzw. elementów diagonalnych) $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$ nie zależy od orientacji ciała względem układu współrzędnych. Współczynniki o wskaźnikach mieszanych zwane są *momentami zboczenia* i charakteryzują asymetrię. Można jednak wybrać takie osie prostokątnego układu współrzędnych, kiedy to zboczenia zerują się. Takie osie nazywamy *głównymi osiami bezwładności*, im momenty bezwładności - *głównymi momentami bezwładności*. Dla kuli trzy główne momenty bezwładności są jednakowe. W przypadku ogólnym wielkości te są różne, a ruch obrotowy względem osi odpowiadających maksymalnemu lub minimalnemu momentowi bezwładności cechuje stała orientacja bryły w przestrzeni. Takie osie nazywane są *osiami swobodnymi* bryły sztywnej.



Rys. 1. Prostopadłościan w układzie współrzędnych

Wyprowadźmy teraz wzory określające momenty bezwładności prostopadłościanu o masie m i krawędziach a , b i c względem osi prostopadłych do poszczególnych ścian przechodzących przez ich środki (tj. osi głównych). W układzie współrzędnych przyjętym na rysunku 1 moment bezwładności prostopadłościanu względem osi x dany jest wzorem (12)

$$I_{xx} = \int \rho(y^2 + z^2) dV$$

gdzie $dV = a dy dz$ oraz $u^2 = y^2 + z^2$

Zatem

$$I_{xx} = \frac{m}{bc} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) dy dz$$

Możemy zmienić granice całkowania i wówczas

$$I_{xx} = 4 \frac{m}{bc} \int_0^{\frac{c}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} (y^2 + z^2) dy dz = 4 \frac{m}{bc} \int_0^{\frac{c}{2}} \left(\frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2} \right) dz$$

Ostatecznie

$$I_{xx} = 4 \frac{m}{bc} \left(\frac{b^3 c}{48} + \frac{bc^3}{48} \right) = \frac{1}{12} (b^2 + c^2) \quad (13a)$$

W podobny sposób możemy otrzymać wyrażenia na momenty bezwładności graniastosłupa względem osi y i z

$$I_y = \frac{1}{12} (a^2 + c^2) \quad (13b)$$

oraz

$$I_z = \frac{1}{12} (a^2 + b^2) \quad (13c)$$

III. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie momentu bezwładności brył w kształcie prostopadłościanu dla dowolnie wybranej osi obrotu. Pomiary przeprowadzone dla kierunków wzdłuż osi głównych możemy zweryfikować, posługując się wzorami (13a,b,c), natomiast w przypadku dowolnej osi, posługując się wzorem uwzględniającym tzw. kosinusy kierunkowe danej osi obrotu

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma \quad (14)$$

gdzie α , β i γ - kąty określające położenie osi obrotu względem osi x , y i z (lub a , b i c). Dla przykładu kosinusy kierunkowe osi przechodzących wzdłuż głównych przekątnych prostopadłościanu wynoszą:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \cos \beta &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\end{aligned}\tag{15}$$

IV. Zasada pomiaru

W pomiarze wykorzystujemy wahadło skrętne (torsyjne), którego istotną częścią jest zamocowana na stosunkowo sztywnych drutach ramka. Ramka zaopatrzona jest w odpowiednie pokrętła śrubowe, a bryły - wzorcowa i badane - posiadają odpowiednie otwory; dzięki czemu możliwe jest dogodne i stabilne mocowanie brył w ramce.

Najpierw wprawiamy w drganie ramkę nieobciążoną bryłą. Niech okres drgań wynosi tym razem T_0 . Określony jest on zależnością

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}}\tag{16}$$

gdzie: I_0 - moment bezwładności nieobciążonej ramki, D - moment kierujący wahadła.

Następnie umieszczamy w ramce bryłę foremną o znanym momencie bezwładności I_w i tak obciążoną ramkę wprawiamy w drgania, których okres oznaczamy przez T_w . Możemy napisać

$$T_w = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_w}{D}}\tag{17}$$

Podnosząc równania (16) i (17) do kwadratu, a następnie odejmując stronami, obliczamy moment kierujący D

$$D = \frac{4\pi^2 I_w}{T_w^2 - T_0^2}\tag{18}$$

Teraz wyjmujemy z ramki bryłę o znanym momencie bezwładności, a umieszczamy na nim bryłę o szukanym momencie bezwładności I_x .

W tym przypadku okres drgań oznaczamy jako T_x . Występuje on w równaniu

$$T_x = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_x}{D}}\tag{19}$$

Odejmując od siebie stronami po podniesieniu do kwadratu równań (16) i (17) oraz podstawiając do równania (17) wartość D , otrzymujemy

$$I_x = \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_w^2 - T_0^2} I_w \quad (20)$$

V. Zestaw pomiarowy

Zestaw pomiarowy zawiera obciążniki o następujących parametrach:

1. walec wykorzystywany jako bryła wzorcowa:
masa walca - 1,175 kg
promień walca - 0,025 m
2. badany obciążnik I:
masa obciążnika I - 1,962 kg
wymiary obciążnika II - 0,05 m × 0,05 m × 0,1 m
3. badany obciążnik II:
masa obciążnika II - 1,884 kg
wymiary obciążnika II - 0,04 m × 0,06 m × 0,1 m

VI. Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć sznur sieciowy układu pomiarowego do sieci zasilającej.
2. Wcisnąć przycisk **CETБ** (SIEĆ), kontrolując, czy wszystkie wskaźniki mierników wskazują cyfrę zero, a także czy świeci się żarówka czujnika fotoelektrycznego.
3. Elektromagnes ustawić w zadanym położeniu (np. 25°) na płycie i ustalić jego położenie, dokręcając nakrętkę.
4. Skręcając ramkę przyrządu, zbliżyć jej wysięgnik do elektromagnesu tak, aby jego działanie ustaliło położenie pierwotne ramki.
5. Nacisnąć przycisk **ПУСК** (START); co spowoduje uwolnienie wysięgnika ramki i rozpoczęcie drgań.
6. Następnie nacisnąć przycisk (ZERO), co spowoduje rozpoczęcie pomiaru.
7. Po naliczeniu przez miernik co najmniej $n_s = 9$ drgań skrętnych nacisnąć klawisz **СТОП** (STOP). Układ zakończy pomiar czasu t dla $n = n_s + 1$ drgań.
8. Obliczyć okres drgań wahadła skrętnego ze wzoru:

$$T = \frac{t}{n} \quad (21)$$

gdzie: T - okres drgań skrętnych wahadła; t - czas drgań; n - liczba drgań.

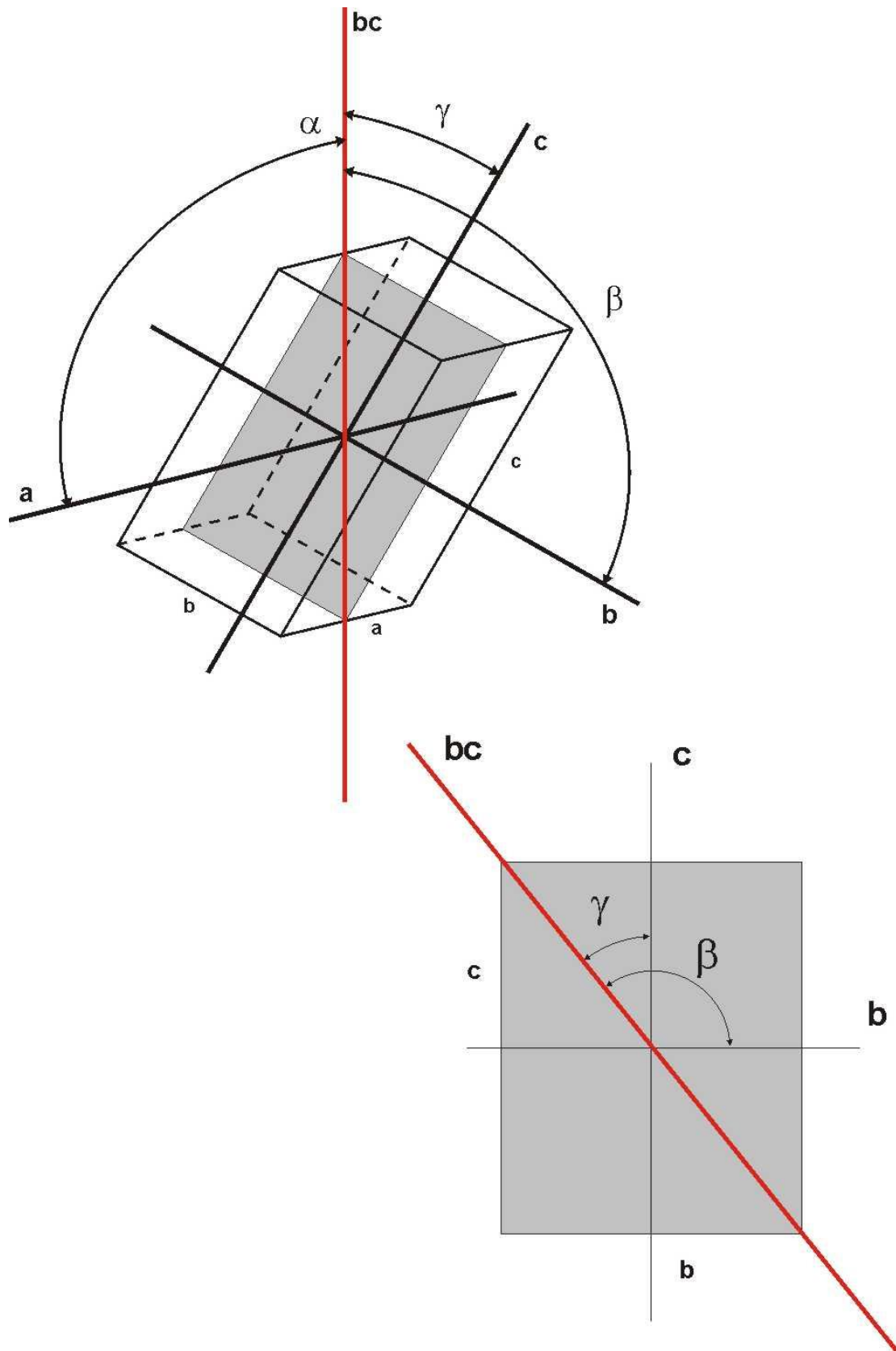
9. W ramce przyrządu umocować bryłę wzorcową (walec).

UWAGA: *Należy czynność tę wykonywać bardzo ostrożnie, aby nie uszkodzić drutu stalowego wahadła, na którym podwieszona jest ramka przyrządu. W celu włożenia lub wymiany obciążnika wystarczy poluzować dwie nakrętki ruchomej poprzeczki ramki, odsuwając lub dosuwając poprzeczkę w pożądane położenie.*

10. Powtórzyć czynności od punktu 5 do 8.

11. Pomiary przeprowadzić dla pozostałych dwóch obciążników dla różnych ustawień osi. Zaleca się zastosować zasadę symboliki (oznaczania) osi obrotu zilustrowaną na rysunku 2. I tak np.: oś obrotu równoległą do krawędzi a i przechodzącą przez środki ścian o krawędziach b i c (dla zamocowania w otworach znajdujących się w środkach tych ścian) oznaczyć symbolem a , a moment bezwładności względem tej osi obrotu jako I_a . Analogicznie postępujemy dla momentów bezwładności I_b , I_c .

Oś obrotu odpowiadającą zamocowaniu w środkach krawędzi a , tzn. oś, której orientacja pokrywa się z orientacją przekątnej przekroju osiowego o wymiarach b i c oznaczyć symbolem bc i odpowiedni moment bezwładności jako I_{bc} .



Rys. 2. Ilustracja zasady oznaczania osi obrotu w odniesieniu do krawędzi prostopadłościanu

VII. Tabela pomiarowa

Rodzaj obciążnika	Masa obciążnika m [kg]	Wymiary obciążnika $a \times b \times c$ [m]	Oś obrotu	Liczba drgań n	Czas drgań t [s]	Okres drgań T [s]	Moment bezwładności wyznaczony $I_{\text{eksp.}} [\text{kgm}^2]$	Moment bezwładności obliczony $I_{\text{obl.}} [\text{kgm}^2]$
Ramka	-----	-----	-----				-----	-----
Walec	1,175	$r = 0,025$	-----				-----	
I	1,962	0,05 0,05 0,1	a					
			c					
			ac					
			aa					
			aac					
II	1,884	0,04 0,06 0,1	a					
			b					
			c					
			ac					
			bc					
			ab					
			abc					

Bryłą o znanym momencie bezwładności jest walec, którego moment bezwładności obliczony dla kierunku osi wzdłuż wysokości wynosi $I_w = \frac{1}{2} mr^2$.

VIII. Opracowanie ćwiczenia

1. Obliczyć moment bezwładności bryły wzorcowej (walca) I_w ze wzoru

$$I_w = \frac{1}{2}mr^2$$

2. Moment bezwładności wyznaczony eksperymentalnie I_x :

- a) Obliczyć wyznaczony moment bezwładności brył I_x ze wzoru

$$I_x = \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_w^2 - T_0^2} I_w$$

gdzie: T_0 - okres drgań ramki, T_x - okres drgań badanej bryły, T_w - okres drgań bryły wzorcowej (walca), I_w - moment bezwładności bryły wzorcowej.

Wyniki wpisać do tabeli.

- b) Dla jednego wybranego przypadku obliczyć błędy bezwzględny i względny momentu bezwładności I_x .
3. Obliczyć moment bezwładności teoretyczny I_{obl} względem różnych osi obrotu z zachowaniem następujących zasad

- a) Moment bezwładności prostopadłościanu o masie m i krawędziach a , b i c względem osi równoległej do krawędzi a i przechodzącej przez środki ścian o krawędziach b i c - pierwszy z tzw. głównych momentów bezwładności obliczamy ze wzoru

$$I_{a,obl} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) \quad (22)$$

Podobnie:

$$I_{b,obl} = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) \quad (23)$$

$$I_{c,obl} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \quad (24)$$

- b) Moment bezwładności bryły względem dowolnie wybranej osi przechodzącej przez środek bryły obliczyć ze wzoru

$$I_{obl} = I_a \cos^2 \alpha + I_b \cos^2 \beta + I_c \cos^2 \gamma \quad (25)$$

gdzie: I_a, I_b, I_c są głównymi momentami bezwładności, α, β, γ to kąty, jakie tworzy oś obrotu z kierunkami głównymi, tj. osiami a, b, c .

4. Porównać moment bezwładności wyznaczony i teoretyczny.
5. Przeprowadzić dyskusję uzyskanych wyników.

Literatura

1. Respondowski R., Laboratorium z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999.
2. Szczeniowski S., Fizyka doświadczalna, cz. 1, Mechanika i akustyka, PWN, Warszawa 1980.
3. Szydłowski H., Pracownia fizyczna wspomagana komputerem, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
4. Wróblewski A.K., Zakrzewski J.A., Wstęp do fizyki, PWN, Warszawa 1989.